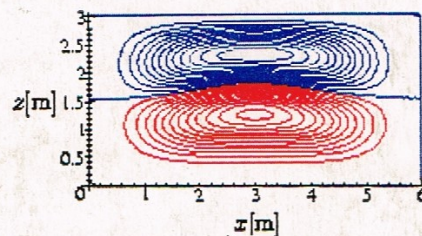




UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



Dinâmica da Dupla Difusão: Aplicação a Lagos Solares

Maria Margarida de Lemos Canedo Giestas Lima
(Licenciada)

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Engenharia

Orientador: Professor Catedrático Heitor Lobato Girão Pina
Co-Orientador: Investigador Principal António Luiz Moura Joyce

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa
Vogais: Professor Catedrático Eduardo Alberto Baptista Maldonado
Professor Catedrático Heitor Lobato Girão Pina
Professor Catedrático José Carlos Fernandes Pereira
Investigador Coordenador Manuel Pedro Ivens Collares Pereira
Investigador Principal António Luiz Moura Joyce
Professor Associado Jorge Alberto Gil Saraiva

Outubro 2000

Conteúdo

Resumo	xiii
Abstract	xv
Palavras Chave	xvii
Keywords	xix
Agradecimentos	xxi
Organização da dissertação	xxiii
Nomenclatura	xxv
1 Lagos Solares	1
1.1 Contexto	1
1.1.1 O que é um Lago Solar	1
1.1.2 Estrutura e funcionamento de um Lago Solar	2
1.1.3 Lagos Solares e suas Aplicações	4
1.2 Tranferência de Calor e Massa num Lago Solar	10
1.2.1 Transferência de Calor: Condução, convecção e radiação	10
1.2.2 Análise da zona gradiente de um Lago Solar: dupla difusão e esta- bilidade	14
1.3 O Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes	25
1.3.1 Resumo histórico	26
1.3.2 Dupla difusão: domínios de aplicação	29
2 Formulação do Problema	31
2.1 Introdução	31
2.1.1 Equações às Derivadas Parciais	31
2.1.2 Conceitos básicos em Mecânica dos Fluidos	38
2.2 Equações Fundamentais	40
2.2.1 Leis de Conservação	40
2.2.2 Relações Constitutivas	45
2.2.3 Equações do Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes com geração interna de calor	47
2.2.4 Equações da zona gradiente do Lago Solar	51

3	Estabilidade de Fluidos	53
3.1	Introdução	53
3.1.1	O problema da estabilidade: conceitos básicos	53
3.1.2	Teoria Linear e Teoria Global	54
3.1.3	Resumo histórico	55
3.2	Análise de Estabilidade	57
3.2.1	Teoria Linear	58
3.2.2	Teoria Global	61
3.2.3	Teoria das Bifurcações	65
3.3	Estabilidade do Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes	67
3.3.1	Estabilidade estática	68
3.3.2	Estabilidade dinâmica	69
4	Formulação Numérica	79
4.1	Introdução	79
4.1.1	Métodos de aproximação; vantagens e desvantagens	79
4.1.2	Classificação dos Métodos Variacionais	81
4.1.3	Revisão da Literatura	82
4.2	Metodologia	83
4.2.1	Formulação fraca	83
4.2.2	O Método de Galerkin	85
4.2.3	Escolha dos subespaços de funções base	88
4.2.4	Formulação fraca simétrica	88
4.2.5	Condições de fronteira	90
4.3	Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes	91
4.3.1	Formulação fraca	92
4.3.2	Formulação fraca simétrica	95
4.3.3	Condições de fronteira	97
4.3.4	Critério de escolha dos espaços de funções teste e tentativa	97
5	Estabilidade de Lagos Solares	99
5.1	Introdução	99
5.2	Efeito da absorção de radiação solar (Caso 1)	101
5.2.1	Soluções estacionárias	102
5.2.2	Formulação do problema de dupla difusão	106
5.2.3	Adimensionalização do sistema de equações	108
5.2.4	Formulação fraca	109
5.2.5	Análise de estabilidade	112
5.2.6	A influência da absorção de radiação na estabilidade do Lago Solar	115
5.2.7	Análise não linear de estabilidade	118
5.2.8	Comparação com os resultados obtidos por Veronis	120
5.2.9	Conclusão	121
5.3	Coefficientes de difusão variáveis (Caso 2)	122
5.3.1	Soluções estacionárias: dependência dos coeficientes de difusão	122
5.3.2	Formulação do problema de dupla difusão	128
5.3.3	Formulação fraca	129
5.3.4	Análise de estabilidade	130

5.3.5	Análise não linear de estabilidade	133
5.3.6	Comparação do Caso 2 com a análise de Veronis	133
5.3.7	Conclusão	133
5.4	O efeito conjunto da absorção de radiação e de K_T e K_S variáveis (Caso 3)	135
5.4.1	Solução estacionária da Temperatura e da Salinidade	136
5.4.2	Formulação do problema de dupla difusão	137
5.4.3	Formulação fraca para a Temperatura e para a Salinidade	138
5.4.4	Análise de estabilidade	138
5.4.5	Análise não linear de estabilidade	140
5.4.6	Conclusão	142
5.5	Análise comparativa dos resultados obtidos	142
5.5.1	Comparação dos sistemas de EDO's obtidos	142
5.5.2	Comparação de resultados dos Casos 2 e 3	143
5.5.3	Comparação dos Casos 1, 2 e 3 com os resultados de Veronis	144
6	Modelação de Lagos Solares	149
6.1	Introdução	149
6.1.1	Objectivo	149
6.1.2	Modelos existentes: revisão bibliográfica	150
6.2	Estabelecimento do problema físico-matemático	152
6.2.1	Formulação do modelo de dupla difusão	152
6.2.2	Condições de fronteira	153
6.2.3	Condições iniciais	158
6.3	Resolução do problema de dupla difusão	158
6.3.1	Formulação fraca	159
6.3.2	Integração numérica	161
6.4	Análise de diferentes perfis iniciais de salinidade	172
6.4.1	Evolução anual considerando o perfil inicial de salinidade S_{in1}	174
6.4.2	Evolução anual considerando os perfis iniciais de salinidade dados por S_{in2} , S_{in3} , S_{in4}	181
6.5	Análise dos resultados obtidos na zona de transição	184
6.5.1	Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in1}	184
6.5.2	Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in2} ($\mu = 0.8$)	190
6.5.3	Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$)	204
6.6	Variação da geometria considerando o perfil inicial de salinidade S_{in2}	212
6.6.1	Resultados obtidos para o domínio Ω_1	212
6.6.2	Resultados obtidos para o domínio Ω_2	218
6.6.3	Resultados obtidos para o domínio Ω_3	222
6.7	Comparação dos resultados obtidos	226
6.8	Análise de Estabilidade	227
6.8.1	Situação de perfil inicial de salinidade S_{in1}	228
6.8.2	Situação de perfil inicial de salinidade S_{in2} , $\mu = 0.8$	228
6.8.3	Situação de perfil inicial de salinidade S_{in2} , $\mu = 0.2$	230

7	Conclusões	233
7.1	Introdução	233
7.1.1	Estabilidade	233
7.1.2	Modelação	235
7.2	Sugestões para trabalho futuro	239
A	Absorção de radiação num Lago Solar	241
A.1	Radiação solar	241
A.1.1	Geometria Terra-Sol	241
A.1.2	Radiação global, directa e difusa	243
A.2	Interação com o Lago	243
B	Calculo da expressão de T_{dp}	245
C	Programas	247
C.1	Introdução	247
C.2	Articulação dos Programas efectuados	250
C.3	Estrutura dos Programas	252
C.4	Programa em Maple	253
C.5	Programa em Fortran	272
D	Propriedades térmicas das soluções aquosas de Cloreto de Sódio	281
	Bibliografia	294

Lista de Figuras

1.1	Lago Solar de Pégões	2
1.2	Estrutura de um Lago Solar de Gradiente salino	3
1.3	Produção de electricidade através de Lagos Solares	7
1.4	Extração de energia para estufas agrícolas	8
1.5	Processo de dessalinização utilizando um destilador de efeito simples	9
1.6	Processo de dessalinização utilizando um destilador de multiefeito	9
1.7	Condução	10
1.8	Convecção	11
1.9	Efeito da dupla difusão na zona gradiente	15
1.10	Possíveis configurações dos gradientes de temperatura e salinidade	16
1.11	Quadrantes de estabilidade	18
1.12	Perfil de Temperatura obtido em Pégões 30/11/82	19
1.13	Perfil de Salinidade obtido em Pégões 30/11/82	19
1.14	Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 30/11/82	20
1.15	Perfil de Temperatura obtido em Pégões em 28/12/82.	21
1.16	Perfil de Salinidade obtido em Pégões em 28/12/82.	21
1.17	Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 28/12/82	22
1.18	Perfil de Temperatura obtido em Pégões em 7/7/85	22
1.19	Perfil de Salinidade obtido em Pégões em 7/7/85	23
1.20	Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 7/7/85	23
1.21	Perfil de Temperatura obtido em 20/8/85	24
1.22	Perfil de Salinidade obtido em 20/8/85	24
1.23	Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 20/8/85	25
2.1	Variação da velocidade com o tempo	39
2.2	Balanço da propriedade P	40
2.3	Balanço de massa	41
2.4	Efeito do tensor de tensões σ num elemento de fluido	42
3.1	Limites de estabilidade de um escoamento	62
3.2	Volume $V(t')$ delimitado por dois planos paralelos	63
3.3	Bifurcação a partir de um valor próprio simples	66
3.4	Atractor do tipo círculo limite e respectiva zona de atracção	66
3.5	Modelos para transição de regime em escoamentos de fluidos e respectivos mecanismos não lineares associados	67
3.6	Esquema da zona gradiente segundo Veronis	68
3.7	Limites de estabilidade de Veronis	75
3.8	Zona A: $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t), R_T = 5 \times 10^3, R_S = -2 \times 10^3$	76

3.9	Zona B : $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$, $R_T = 1 \times 10^9$, $R_S = 2 \times 10^9$	76
3.10	Zona C: $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$, para $R_T = -2 \times 10^4$, $R_S = 2 \times 10^4$	77
5.1	Esquema da zona gradiente	100
5.2	Perfil de temperatura (Caso 1)	104
5.3	Perfil de Salinidade (Caso 1)	105
5.4	Perfis estacionários de temperatura ($\mu = 0.8$ e $\mu = 0.2$)	116
5.5	Início de instabilidades ($\mu = 0.8$ e $\mu = 0.2$): Eq.(5.121) e resultado de Veronis	116
5.6	Limites do movimento periódico ($\mu = 0.8$): Ini. Inst. Eq.: (5.121), Freq. Osc. Eq.: (5.119)	117
5.7	Estados marginais de estabilidade ($\mu = 0.8$): Ini. Inst. Eq.:(5.121), Conv. Est. Eq.:(5.122)	118
5.8	Zona A, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)	119
5.9	Zona B, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)	119
5.10	Zona C, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)	120
5.11	Perfil de temperatura (Caso 2)	124
5.12	Perfil de salinidade (Caso 2)	124
5.13	Variação de K_T e K_S com T e S	125
5.14	Variação quadrática de K_T com z	126
5.15	Variação quadrática de K_S com z	127
5.16	Perfil de temperatura considerando K_T como função quadrática de z	127
5.17	Perfil de salinidade considerando K_S como função quadrática de z	128
5.18	Frequência de oscilação e início de instabilidades: Ini. Inst. Eqs.:(5.180), Freq. Osc. Eq.:(5.181)	132
5.19	Zona A: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)	133
5.20	Zona B: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)	134
5.21	Zona C: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)	134
5.22	Comparação do início de oscilações entre o Caso 2: Eq.:(5.180) e Veronis	135
5.23	Perfil de temperatura (Caso 3)	137
5.24	Estados de estabilidade marginal: Conv. Est. Eq.:(5.207), Ini. Inst. Eq.:(5.208) e Freq. Osc. Eq.:(5.209)	140
5.25	Zona A: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)	141
5.26	Zona B: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)	141
5.27	Zona C: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)	142
5.28	Início de instabilidades: Caso 2 Eq.: (5.180), Caso 3 Eq.:(5.208) e análise de Veronis	144
5.29	Convecção estacionária: Caso 2 (Eq.:(5.179)), Caso 3 (Eq.:(5.207)) e análise de Veronis	145
5.30	Declives das rectas do início de instabilidades (Casos 1, 2 e 3 e de Veronis)	146
5.31	Declives das rectas do início movimento estacionário (Casos 1, 2 e 3 e de Veronis)	146
6.1	Esquema de um Lago Solar	152
6.2	Fluxos de calor em $z = d$	154
6.3	Fluxos de calor em $z = 0$	156
6.4	Valores sintetizados da média horária da radiação solar incidente no plano horizontal em Pégões	167

6.5	Valores sintetizados da Temperatura ambiente em Pégões	167
6.6	Valores sintetizados da Velocidade do vento em Pégões	168
6.7	Valores sintetizados da Humidade Relativa em Pégões	168
6.8	Valores sintetizados da Temperatura do céu em Pégões	169
6.9	Valores sintetizados do Coeficiente de convecção em Pégões	169
6.10	Estrutura da análise de resultados	173
6.11	Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 4 modos), S_{in1}	174
6.12	Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 4 modos), S_{in1}	176
6.13	Permutas térmicas em $z = d$ (modelo a 4 modos), S_{in1}	176
6.14	Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 6 modos), S_{in1}	177
6.15	Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 6 modos), S_{in1}	178
6.16	Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 8 modos), S_{in1}	178
6.17	Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 8 modos), S_{in1}	179
6.18	Evolução do perfil de Temperatura, S_{in2}	182
6.19	Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 8 modos), (S_{in2})	182
6.20	Evolução do perfil de Temperatura, S_{in3}	183
6.21	Evolução do perfil de Temperatura, S_{in4}	183
6.22	Perfis de Temperatura (S_{in1}), observados durante 20 mn do dia 54	185
6.23	Evolução do perfil de Temperatura:a) fase inicial, b)fase intermédia	185
6.24	Evolução do perfil de Temperatura, fase final	186
6.25	Perfis de Salinidade (S_{in1}), observados durante 20 mn do dia 54	186
6.26	Diagrama dos gráficos (ψ) para S_{in1} ($t_0 = 15$ mn do dia 54)	187
6.27	Linhas de corrente S_{in1} , $t_0 = 15$ mn do dia 54	188
6.28	Linhas de corrente S_{in1} : a) $t_0 + 90$ s, b) $t_0 + 140$ s	188
6.29	Linhas de corrente S_{in1} : a) $t_0 + 190$ s, b) dia 334	189
6.30	Velocidade máxima observada S_{in1}	189
6.31	Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 25mn (após $t_0 = 15$ mn do dia 116)	191
6.32	Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 35$ mn) 192	
6.33	Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 280$ mn)	192
6.34	Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 25 minutos (após $t_0 = 15$ mn do dia 116)	193
6.35	Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 35$ mn) 193	
6.36	Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 280$ mn) 194	
6.37	Diagrama dos gráficos (ψ) para S_{in2} ($t_0 = 2$ h15 mn do dia 116)	195
6.38	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 =$ dia116, b) $t_0 + 80$ s	195
6.39	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 1140$ s, b) $t_0 + 1150$ s	196
6.40	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3500$ s, b) $t_0 + 3530$ s	196
6.41	Perfil de Temperatura em $t_0 + 3530$ s	197
6.42	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3610$ s, b) $t_0 + 3620$ s	198
6.43	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3660$ s, b) $t_0 + 3670$ s	198
6.44	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3680$ s, b) $t_0 + 3690$ s	199
6.45	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3710$ s, b) $t_0 + 3720$ s	199
6.46	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3770$ s, b) $t_0 + 3800$ s	200
6.47	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3810$ s, b) $t_0 + 3820$ s	200
6.48	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3840$ s, b) $t_0 + 4860$ s	201

6.49	Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 7800$ s, b) $t_0 + 9000$ s	201
6.50	Velocidade máxima observada, S_{in2} ($\mu = 0.8$)	202
6.51	Perfis de Temperatura e de Salinidade em regime convectivo (S_{in2}), dia 334	203
6.52	Linhas de corrente em regime convectivo S_{in2} , dia 334	203
6.53	Velocidade em $(x, z) = (3 \text{ m}, 2 \text{ m})$, S_{in2}	204
6.54	Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 8$ mn)	205
6.55	Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 50$ mn)	205
6.56	Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 26 minutos (após $t_0 + 150$ mn)	206
6.57	Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 8$ mn)	207
6.58	Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 50$ mn)	207
6.59	Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 26 minutos (após $t_0 + 150$ mn)	208
6.60	Diagrama dos gráficos (ψ) de S_{in2} , $\mu = 0.2$ ($t_0 = 11$ mn do dia 116)	208
6.61	Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) dia 116, b) $t_0 + 20$ s	209
6.62	Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 550$ s, b) $t_0 + 570$ s	209
6.63	Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 580$ s, b) $t_0 + 590$ s	210
6.64	Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 610$ s, b) $t_0 + 620$ s	210
6.65	Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 630$ s, b) $t_0 + 640$ s	211
6.66	Velocidade máxima observada S_{in2} ($\mu = 0.2$)	211
6.67	Diagrama dos gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_1 ($t_0 = 24$ mn do dia 173)	213
6.68	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 ($t_0 =$ dia 173)	213
6.69	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 520$ s, b) $t_0 + 530$ s	214
6.70	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 545$ s, b) $t_0 + 570$ s	214
6.71	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 595$ s, b) $t_0 + 600$ s	215
6.72	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 750$ s, b) $t_0 + 900$ s	215
6.73	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 970$ s, b) $t_0 + 995$ s	216
6.74	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 1020$ s, b) $t_0 + 1120$ s	216
6.75	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 1420$ s, b) $t_0 + 1450$ s	217
6.76	Velocidade máxima observada S_{in2} , Ω_1	217
6.77	Diagrama de gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_2 ($t_0 = 10$ mn do dia 127)	218
6.78	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 , $t_0 = 10$ mn do dia 127	219
6.79	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 910$ s, b) $t_0 + 1210$ s	219
6.80	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1390$ s, b) $t_0 + 1440$ s	220
6.81	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1500$ s, b) $t_0 + 1780$ s	220
6.82	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1880$ s, b) $t_0 + 3000$ s	221
6.83	Velocidade máxima observada S_{in2} , Ω_2	221
6.84	Diagrama de gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_3 ($t_0 = 4$ mn do dia 113)	222
6.85	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) dia 113, b) $t_0 + 5900$ s	223
6.86	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) $t_0 + 6400$ s, b) $t_0 + 6600$ s	223
6.87	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) $t_0 + 7000$ s, b) $t_0 + 7100$ s	224
6.88	Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 , $t_0 =$ dia 113	224

6.89	Linhas de corrente $S_{in2}, \Omega_3, t_0 + 9000 \text{ s}$	224
6.90	Velocidade máxima observada S_{in2}, Ω_3	225
6.91	Evolução do perfil de Temperatura S_{in2}, Ω_3	226
6.92	Análise de estabilidade para S_{in1}	229
6.93	Análise de estabilidade para S_{in2} ($\mu = 0.8$)	229
6.94	Análise de estabilidade para S_{in2} ($\mu = 0.2$)	230
A.1	Movimento aparente do Sol	242
A.2	Posição do Sol sobre o plano horizontal	242
A.3	Radiação	244
C.1	Articulação dos programas efectuados	251

Lista de Tabelas

1.1	Características do Lago Solar de Pégões	5
1.2	Valores típicos para os Coeficientes de Transferência de calor por Convecção	12
5.1	Valores de μ	102
5.2	Valores típicos de um Lago Solar	104
5.3	Valores típicos de Temperatura e Concentração Salina	123
5.4	Valores típicos de \overline{K}_T , \overline{K}_S , \overline{Pr} e $\overline{\tau}$	132
5.5	Declives das equações dos estados marginais	143
5.6	Critério de estabilidade para a zona gradiente	144
6.1	Números de condição da matriz \mathbf{A}	163
6.2	Valores Típicos do Lago Solar (cl_1)	166
6.3	Perfis iniciais de salinidade a)	171
6.4	Perfis iniciais de salinidade b)	171
6.5	Código de cores	173
6.6	Valores de início de convecção, tolerância de 10^{-7} , S_{in1}	180
6.7	Valores de início de convecção, tolerância de 10^{-4} , S_{in1}	180

Resumo

O objectivo do presente trabalho consiste na análise de estabilidade e na modelação de Lagos Solares. Um Lago Solar é um reservatório de água cuja finalidade é captar e armazenar energia solar, para posterior extracção sob a forma de energia térmica. Para este efeito torna-se necessário impedir a formação de correntes de convecção no interior do Lago.

Uma forma de o fazer consiste em criar um gradiente salino vertical, com uma maior concentração de sal no fundo do Lago. Este processo impossibilita que um elemento de fluido do fundo do Lago ao absorver energia solar sofra uma alteração de densidade que conduza à sua ascensão permanecendo, assim, a energia absorvida no elemento de fluido no fundo. Ao impedir a convecção, a zona gradiente transfere calor do fundo para a superfície apenas por difusão. O funcionamento de todo o Lago depende, pois, da estabilidade desta zona gradiente, onde coexistem a difusão térmica e a difusão molecular.

No entanto, o facto da temperatura possuir um coeficiente de difusão muito superior ao coeficiente de difusão molecular dá origem a instabilidades, ditas de "dupla difusão", as quais podem conduzir a um processo convectivo, mesmo em condições em que o gradiente salino imposto é suficiente do ponto de vista estático.

O presente trabalho estabelece os limites de manutenção do regime difusivo na zona gradiente face aos efeitos de absorção de radiação solar, de variação dos coeficientes de difusão isoladamente ou em conjunto.

A análise de estabilidade da camada gradiente é efectuada recorrendo ao sistema de equações de Navier-Stokes, com a aproximação de Boussinesq. Este sistema é resolvido de uma forma semi-analítica, propondo-se soluções de aproximação contendo um termo de perturbação. A evolução destas perturbações é analisada de acordo com a Teoria Linear sendo os limites de estabilidade obtidos em função dos números de Rayleigh Térmico e Salino.

O trabalho finaliza propondo uma modelação bidimensional para um Lago Solar. Esta modelação, semi-analítica, prevê o efeito de absorção de radiação solar e contabiliza as trocas térmicas nas fronteiras do Lago. O modelo obtido permite analisar a evolução dos campos de temperatura, de salinidade e de velocidade ao longo do tempo, descrevendo a transição do regime difusivo para o regime convectivo, sendo possível testar os critérios de estabilidade previamente deduzidos.

Da análise do modelo conclui-se que o início de convecção num lago Solar é função do perfil de salinidade imposto inicialmente, da geometria do Lago e da transparência do mesmo. Conclui-se também que a transição de regime difusivo para o regime convectivo se inicia por meio de movimentos oscilatórios e que a configuração final das células de convecção varia com a geometria considerada.

Abstract

This work presents a stability analysis an a model of Solar Ponds.

A Solar Pond is a basin of water that traps and stores solar energy. This objective is possible by preventing the onset of convection motions in a layer in the Pond. To do this a vertical saline gradient is imposed with a greater salt concentration in the bottom of the Pond. This process prevents that a fluid element from the bottom of the Pond which absorbs solar radiation suffers a density variation and arises in the layer, staying instead the absorbed solar energy in the fluid element in the bottom. In this way, preventing convection, the gradient zone transfers heat from the bottom to the surface of the Pond, only by thermal diffusion. The behaviour of all the Pond depends on the stability of this gradient zone where there are both thermal and molecular diffusions.

However, as the thermal diffusion coefficient is much greater then the saline diffusion coefficient "double diffusion" instabilities may be developed, leading to the onset of a convection process, even in the conditions of static stability.

The present work establishes the bounds for the maintenance of the diffusive transfer process in the gradient zone under different conditions. The effect of solar radiation absorption in the Pond, variation of diffusion coefficients, and both effects are taken in account. The stability analysis of the gradient layer considers the Boussinesq approximation of the Navier Stokes system of equations. This system is solved using a semi-analytical process by assuming approximated solutions for the variables, containing a perturbation term. The evolution of these perturbations is analysed through Linear Theory being the stability limits obtained as relations between the thermal and saline Rayleigh numbers.

The work finishes with a 2D semi-analytical model of a Solar Pond, including the effect of solar radiation absorption in the Pond and thermal flow changes at the boundaries. The model produced is able to analyse the evolution of the temperature, salinity and velocity fields and the transition from diffusion to convection, being possible to validate the stability criteria previously obtained.

It is possible to conclude from the analysis of the model that the onset of convection in a Solar Pond is function of the initial saline profile imposed, of the Pond geometry and of the Pond transparency. It is also possible to conclude that the transition from diffusive to convective flow begins with oscillatory motion and that the final configuration of the convection cells varies with the considered geometry of the Pond.

Palavras Chave

Lago Solar

Absorção de Radiação Solar

Estabilidade

Dupla Difusão

Início de Convecção

Modelação

Keywords

Solar Pond

Solar Radiation Absorption

Stability

Double Diffusion

Onset of Convection

Modelisation

Agradecimentos

Começo por agradecer à direcção do Departamento de Energias Renováveis as facilidades que me deram e que possibilitaram a execução deste trabalho. Primeiro, na pessoa do Engenheiro Jorge Saraiva que, como Director do DER à altura do início deste trabalho, após ter sugerido a hipótese de um trabalho na área da Transferência de Calor e Massa fez as diligências necessárias ao acompanhamento naquela área através da orientação prestada pelo Professor Heitor Pina. Em segundo lugar, na pessoa da Doutora Teresa Pontes que sempre apoiou a execução do trabalho aqui apresentado. Também ao Doutor Helder Gonçalves, como actual Director, agradeço a latitude facultada para a finalização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de grupo o entusiasmo transmitido ao longo do tempo em que este trabalho se foi desenvolvendo, bem como todo o tipo de informações necessárias ao desenrolar do mesmo, as quais foram gentilmente prestadas por várias pessoas, salientando-se o Doutor Cruz Costa, o Engenheiro David Loureiro, a Doutora Maria João Carvalho, a Doutora Ana Estanqueiro, o Doutor Ricardo Aguiar. Ao meu colega de gabinete, Mestre Carlos Rodrigues o meu obrigada pelo tempo dispensado ao longo de várias discussões. À Engenheira Célia Tavares agradeço não só o tempo dispendido com os gráficos do Capítulo 5, como a boa vontade evidenciada na sua execução.

Também não quero deixar de referir com gratidão os comentários feitos ao trabalho que aqui se apresenta pelo Professor Safi, do Laboratoire de Thermique Industrielle da École Nationale d'Ingenieurs de Tunis, durante uma visita que efectuou ao DER.

Uma palavra especial de agradecimento para o Doutor Paulo Martel que me ajudou a trabalhar com o processador de texto Latex.

Agradeço contudo de forma especial ao meu coorientador Doutor António Joyce não só a brilhante e contínua orientação que me facultou como o entusiasmo que me transmitiu.

Em relação ao meu coorientador Professor Heitor Pina só tenho a dizer que além de ter tornado possível esta tese (e estou aqui a referir-me essencialmente às partes de análise numérica e de programação) foi talvez o melhor Professor de "Matemática" que tive.

A ambos agradeço o rigor científico que não perdoaram e as repreensões que me deram em momentos de desalento.

A todos os Amigos com quem privo (e da companhia dos quais me privei durante algum tempo) peço desculpa por qualquer palavra mais agressiva.

À minha família directa agradeço alguns sacrifícios de tempo que me concederam. Agradeço, de um modo particular, ao meu marido toda a solicitude e carinho que dispendeu para com os nossos filhos, por forma a compensar a ausência por vezes necessária da Mãe, em idades onde tal não é susceptível de ser entendido.

Mas o meu mais profundo agradecimento vai para os meus Pais que nunca me permitiram desistir e sempre me proporcionaram condições para prosseguir. Com toda a justiça a eles dedico este trabalho.

Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se estruturada em três partes:

- Numa 1^a Parte reflecte-se o conhecimento proveniente da experiência obtida com o funcionamento do Lago Solar de Pégões (Capítulo 1).
- Na 2^a Parte desenvolve-se a formulação do problema da Estabilidade de um Lago Solar, na sua vertente físico-matemática, ao longo dos Capítulos 2, 3 e 4.
- A 3^a Parte inclui a análise da estabilidade da zona intermédia de um Lago Solar e a simulação semi-analítica do funcionamento de um Lago Solar. Esta Parte é constituída pelos Capítulos 5, 6 e 7.

A contribuição original para este trabalho encontra-se reunida nos Capítulos 5, 6 e 7, ainda que alguns desenvolvimentos igualmente originais sejam iniciados nos Capítulos 2 e 4. Os Capítulos 1 e 3 são essencialmente descritivos.

Os capítulos que integram a dissertação apresentam o seguinte conteúdo:

No Capítulo 1 introduz-se o conceito de Lago Solar, descrevendo-se a sua estrutura e o seu funcionamento. Abordam-se os processos de transferência de calor e massa que ocorrem num Lago Solar e finaliza-se com a análise da bibliografia relevante ao problema de Rayleigh-Bénard. Trata-se de um Capítulo de apresentação do dispositivo cuja análise físico-matemática se desenvolve ao longo da dissertação.

No Capítulo 2 estabelece-se o conjunto de equações que serve de base ao estudo da estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar.

No Capítulo 3 apresentam-se os conceitos gerais da Teoria da Estabilidade em Mecânica de Fluidos. Desenvolve-se em particular a aplicação da Teoria Linear das pequenas perturbações ao problema clássico de Rayleigh-Bénard, com o objectivo de introduzir o procedimento que serve de base ao estudo de estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar.

No Capítulo 4 desenvolve-se a metodologia de cálculo utilizada na resolução do sistema de equações de conservação deduzido no Capítulo 2, detalhando-se a formulação fraca para a resolução de equações diferenciais e o método de Galerkin para a obtenção de soluções aproximadas. Finaliza-se com a aplicação da formulação fraca simétrica ao modelo deduzido no Capítulo 2.

No Capítulo 5 analisa-se a estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar considerando três Casos distintos:

- Caso 1: efeito da absorção de radiação solar no Lago;
- Caso 2: efeito da variação dos coeficientes de difusão térmica e salina;
- Caso 3: efeito conjunto da absorção de radiação solar no Lago e da variação dos coeficientes de difusão da temperatura e da concentração salina.

Após a apresentação da formulação fraca para cada caso, determinam-se os critérios de estabilidade marginal para as situações analisadas. Apresenta-se, também, uma visualização no plano dos números de Rayleigh, dos modos das funções propostas para as variáveis temperatura e velocidade, dando indicação da morfologia das soluções. Finaliza-se com um estudo comparativo dos resultados obtidos.

No Capítulo 6 apresenta-se a modelação, bidimensional, semi-analítica, da dinâmica do Lago Solar. O objectivo principal do modelo desenvolvido é dar indicação da transição de regime difusivo a regime convectivo que ocorre sob certas condições num Lago Solar, através de uma situação de instabilidade. A modelação contabiliza o efeito da absorção de radiação no Lago e engloba um conjunto de condições iniciais que possibilita a consideração de diferentes perfis iniciais de salinidade. As condições de fronteira, por seu lado, contabilizam as trocas de calor inerentes aos processos de evaporação, convecção e radiação.

Este capítulo proporciona a visualização do tipo de escoamento no Lago em função do gradiente salino inicialmente estabelecido, traduzindo-se na observação da:

- evolução temporal dos campos de temperatura e de salinidade;
- evolução da forma das células de convecção a partir do momento em que o processo convectivo se desenvolve.

Apresenta-se também neste Capítulo uma comparação entre os valores para o início de instabilidades, obtidos pela análise de estabilidade do Capítulo 5, pelo modelo dinâmico desenvolvido e dos dados obtidos no Lago Solar de Pégões.

No Capítulo 7 apresentam-se as conclusões gerais do trabalho e estabelecem-se as linhas de possíveis desenvolvimentos futuros.

Nomenclatura

Capítulo 1

C_p	Calor específico [J/kg°C]
d	Espessura da camada em z [m]
g	Aceleração da gravidade [m/s ²]
h_d	Coefficiente de transferência de calor [W/m ² °C]
h	Altura [m]
k	Condutividade térmica [W/m°C]
k_w	Condutividade térmica da água [W/m°C]
k_f	Condutividade térmica do fluido [W/m°C]
K_S	Difusibilidade molecular do Cloreto de Sódio [m ² /s]
K_T	Difusibilidade térmica do Cloreto de Sódio [m ² /s]
Nu	Número de Nusselt (adimensional)
Pr	Número de Prandtl (adimensional)
q''	Fluxo de calor [W/m ²]
R_S	Número de Rayleigh salino (adimensional)
R_T	Número de Rayleigh térmico (adimensional)
S	Concentração salina [kg/m ³]
Sc	Número de Schmidt (adimensional)
T	Temperatura [°C]
z	Coordenada vertical [m]

Símbolos Gregos

α	Coefficiente de expansão térmica [°C ⁻¹]
ϵ	Emissividade da água
μ	Viscosidade dinâmica [m ² /s]
μ_e	Coefficiente de extinção [m ⁻¹]
ν	Viscosidade cinemática [m ² /s]
ρ	Densidade da solução [kg/m ³]
τ	Quociente entre as difusibilidades térmica e salina (adimensional)
ΔS	Diferencial de concentração salina [kg/m ³]
ΔT	Diferencial de temperaturas [°C]

Capítulo 2

\vec{a}	Aceleração [m/s ²]
C_p	Calor específico [J/kg°C]
D_{AB}	Difusibilidade da componente A na componente B [m ² /s]
e	Energia interna específica [J]
\dot{E}_{in}	Taxa de entrada de energia [W]
\dot{E}_{out}	Taxa de saída de energia [W]
\dot{E}_g	Taxa de geração de energia interna [W]
\dot{E}_{st}	Taxa de variação de energia interna [W]
\mathbf{f}	Força de superfície de componentes (X, Y, Z) [N]
\vec{F}_g	Força da gravidade [N]
p	Pressão atmosférica [Pa]
\dot{q}	Taxa de geração interna de calor por unidade de volume [W/m ³]
q''	Fluxo de calor [W/m ²]
h	Coefficiente de convecção natural para o ar [W/m ² °C]
j	Fluxo difusivo de massa [kg/sm ²]
\vec{k}	Versor do eixo dos zz
k	Condutividade térmica [W/m°C]
k_w	Condutividade térmica da água [W/m°C]
K_S	Difusibilidade molecular do Cloreto de Sódio [m ² /s]
K_T	Difusibilidade térmica do Cloreto de Sódio [m ² /s]
m	Massa [kg]
$\dot{M}_{A,in}$	Taxa de entrada da componente A [kg/s]
$\dot{M}_{A,out}$	Taxa de saída da componente A [kg/s]
$\dot{M}_{A,g}$	Taxa de geração da componente A [kg/s]
$M_{A,st}$	Massa da componente A [kg]
\vec{n}	Normal exterior
n''	Fluxo de massa [kg/sm ²]
\mathbf{v}	Velocidade de coordenadas (u, v, w) [m/s]
\mathbf{x}	Ponto de coordenadas (x, y, z) [m]
S	Concentração salina em percentagem mássica [%]
T	Temperatura [°C]
t	Tempo [s]

Símbolos Gregos

α	Coefficiente de expansão térmica do Cloreto de Sódio [°C ⁻¹]
β	Coefficiente de expansão do Cloreto de Sódio [m ³ /kg]
δ_{ij}	Tensor de Kronecker
ν	Viscosidade cinemática [m ² /s]
ρ	Densidade da solução [kg/m ³]
σ	Tensor das tensões
τ	Tensão de corte
ψ	Função de corrente [m/s ²]

Γ	Fronteira de Ω
Φ	Função de dissipação viscosa
Ω	Domínio de integração

Capítulo 3

\mathcal{E}	Energia [J]
$\mathcal{E}(0)$	Energia associada a uma perturbação inicial [J]
F	Campo de forças externas [N]
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]
K_S	Difusibilidade molecular do Cloreto de Sódio [m^2/s]
K_T	Difusibilidade térmica do Cloreto de Sódio [m^2/s]
p	Pressão [Pa]
Pr	Número de Prandtl (adimensional)
Re	Número de Reynolds (adimensional)
R_S	Número de Rayleigh salino (adimensional)
R_T	Número de Rayleigh térmico (adimensional)
R_{sal}	Número de Rayleigh salino modificado (adimensional)
S	Concentração salina [kg/m^3]
Sc	Número de Schmidt (adimensional)
t	Tempo [s]
T	Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]
\mathbf{v}	Velocidade [m/s]
z	Altura da camada [m]

Símbolos Gregos

α	Coefficiente de expansão térmica do Cloreto de Sódio [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
β	Coefficiente de expansão do Cloreto de Sódio [m^3/kg]
ν	Viscosidade [m^2/s]
ν_G	Limite de estabilidade global
ν_L	Limite de estabilidade linear
ϕ	Função de corrente [m/s^2]
ρ	Densidade da solução [kg/m^3]
ω_0	Frequência de oscilação
ΔS	Diferencial de concentração salina [kg/m^3]
ΔT	Diferencial de temperaturas [$^{\circ}\text{C}$]
Θ, Γ, W	Amplitudes adimensionais

Capítulo 4

$a_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da temperatura
$b_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da salinidade
$c_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da função de corrente
d	Espessura da zona gradiente [m]
Pr	Número de Prandtl (adimensional)
R_S	Número de Rayleigh salino (adimensional)
R_T	Número de Rayleigh térmico (adimensional)
S	Concentração salina [kg/m ³]
T	Temperatura [°C]
\mathcal{U}	Classe de funções tentativa
\mathcal{U}_{n1}	Subespaço das funções tentativa φ_i
\mathcal{U}_{n2}	Subespaço das funções tentativa ϖ_i
\mathcal{U}_{n3}	Subespaço das funções tentativa ξ_i
\mathcal{V}	Classe de funções teste

Símbolos Gregos

λ	Comprimento do domínio Ω [m]
ξ_i	Funções tentativa para a salinidade
ϖ_i	Funções tentativa da função de corrente
φ_i	Funções tentativa para a temperatura
ψ	Função de corrente [m/s]
Γ	Fronteira do domínio
Ω	Domínio

Capítulo 5

a	Coefficiente nos Casos 1 e 3
A	Coefficiente nos Casos 1 e 3
$a_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da temperatura
$\dot{a}_i(t)$	Derivada temporal de $a_i(t)$
$b_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da salinidade
$\dot{b}_i(t)$	Derivada temporal de $b_i(t)$
$c_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da função de corrente
$\dot{c}_i(t)$	Derivada temporal de $c_i(t)$
C	Coefficiente nos Casos 2 e 3
C_1, C_2, C_3	Constantes de integração
C_p	Calor específico [J/kg° C]
d	Espessura do Lago [m]
E	Coefficiente nos Casos 1 e 3
F	Coefficiente nos Casos 1 e 3
F_1	Coefficiente nos Casos 2 e 3

g	Aceleração da gravidade [m/s ²]
h_d	Coefficiente de convecção para a zona superficial [W/m ² °C]
\vec{k}	Versor do eixo dos zz
K_S	Difusibilidade molecular do Cloreto de Sódio [m ² /s]
K_T	Difusibilidade térmica do Cloreto de Sódio [m ² /s]
k_w	Condutividade térmica da água [W/m° C]
L_1, L_2, L_3	Coefficientes nos Casos 1 e 3
m_1, m_2	Coefficientes nos Casos 1 e 3
Pr	Número de Prandtl (adimensional)
q''	Fluxo de calor [W/m ²]
\dot{q}	Taxa de geração interna de calor por unidade de volume [W/m ³]
R_S	Número de Rayleigh salino (adimensional)
R_T	Número de Rayleigh térmico (adimensional)
S_1	Coefficiente nos Casos 2 e 3
S	Concentração salina [kg/m ³]
t	Tempo [s]
P	Coefficiente nos Casos 1 e 3
T	Temperatura [°C]
\mathcal{U}_{n1}	Subespaço das funções tentativa φ_i
\mathcal{U}_{n2}	Subespaço das funções tentativa ϖ_i
\mathcal{U}_{n3}	Subespaço das funções tentativa ξ_i
\mathbf{v}	Velocidade de coordenadas (u, v, w) [m/s]
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas [m]

Símbolos Gregos

α	Coefficiente de expansão térmica do Cloreto de Sódio [°C ⁻¹]
β	Coefficiente de expansão do cloreto de sódio [m ³ /kg]
λ	Comprimento do domínio Ω [m]
μ	Coefficiente de extinção [m ⁻¹]
ν	Viscosidade cinemática [m ² /s]
ψ	Função de corrente [m/s]
ξ_i	Funções tentativa para a salinidade
ρ	Densidade da solução [kg/m ³]
σ	Valor próprio
σ_{xz}	Tensor das tensões [N/m ²]
ϖ_i	Funções tentativa da função de corrente
φ_i	Funções tentativa para a temperatura
τ	Quociente entre as difusibilidades térmica e salina (adimensional)
ΔS	Diferencial de concentração salina [kg/m ³]
ΔT	Diferencial de temperaturas [°C]
Γ	Fronteira do domínio
Ω	Domínio

Capítulo 6

$a_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da temperatura
$b_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da salinidade
$c_i(t)$	Coefficiente multiplicativo da função de aproximação da função de corrente
$a f_i(t)$	Coefficientes multiplicativos
C_p	Calor específico [J/kg ^o C]
d	Espessura da zona gradiente [m]
\vec{g}	Aceleração da gravidade [m/s ²]
G_{rT}	Número de Grachov térmico (adimensional)
h_d	Coefficiente de convecção para o ar [W/m ² o C]
I_b	Radiação directa instantânea [W/m ²]
I_d	Radiação difusa instantânea [W/m ²]
I_h	Radiação global instantânea sobre uma superfície [W/m ²]
\vec{k}	Versor do eixo dos zz
K_S	Difusibilidade molecular do Cloreto de Sódio [m ² /s]
K_T	Difusibilidade térmica do Cloreto de Sódio [m ² /s]
k_w	Condutividade térmica da água [W/m ^o C]
k_{solo}	Condutividade térmica do solo [W/m ^o C]
P_{atm}	Pressão atmosférica [Pa]
P_b	Fracção de radiação directa transmitida abaixo do plano da água (adimensional)
P_d	Fracção de radiação difusa transmitida abaixo do plano da água (adimensional)
$P_{s,Td}$	Pressão parcial de vapor saturado à temperatura $T(d)$ [Pa]
P_{Tamb}	Pressão parcial do vapor de água no ar [Pa]
q''	Fluxo de calor [W/m ²]
q''_{absor}	Fluxo de calor absorvido [W/m ²]
q''_{cond}	Fluxo condutivo [W/m ²]
q''_{conv}	Fluxo de calor convectivo [W/m ²]
q''_{evap}	Fluxo de calor evaporativo [W/m ²]
q''_{rad}	Fluxo radiativo [W/m ²]
q''_{total}	Fluxo total na fronteira superior do domínio Ω [W/m ²]
q''_{solo}	Fluxo para o solo [W/m ²]
\dot{q}	Taxa de geração interna de calor por unidade de volume [W/m ³]
Re	Número de Reynolds (adimensional)
Ri	Número de Richardson (adimensional)
RS	Número de Rayleigh salino (adimensional)
RT	Número de Rayleigh térmico (adimensional)
S	Concentração salina [kg/m ³] ou [%]
t	Tempo [s]
T	Temperatura [oC]
T_{amb}	Temperatura ambiente [oC]
T_{ceu}	Temperatura do céu para efeitos radiativos [oC]
T_{dp}	Temperatura do ponto de orvalho [oC]
\mathbf{v}	Velocidade de coordenadas (u, v, w) [m/s]
v_w	Velocidade do vento [m/s]
v_{max}	Velocidade máxima [m/s]
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas [m]

Símbolos Gregos

α	Coeficiente de expansão térmica do Cloreto de Sódio [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
β	Coeficiente de expansão do Cloreto de Sódio [m^3/kg]
ϵ	Emissividade da água
λ	Comprimento do domínio Ω [m]
μ	Coeficiente de extinção [m^{-1}]
ν	Viscosidade cinemática [m^2/s]
ξ_i	Funções tentativa para a salinidade
ϖ_i	Funções tentativa da função de corrente
ρ	Densidade da solução [kg/m^3]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann $5.99 \times 10^{-8} \text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$
σ_{xz}	Tensor das tensões [N/m^2]
τ	Quociente entre as difusibilidades térmica e salina
ϕ	Humidade relativa [%]
φ_i	Funções tentativa para a temperatura
ψ	Função de corrente [m/s]
ΔS	Diferencial de concentração salina [kg/m^3]
ΔT	Diferencial de temperaturas [$^{\circ}\text{C}$]
Γ	Fronteira do domínio
Γ_1	Fronteira do domínio relativa a $z = d$
Γ_0	Fronteira do domínio relativa a $z = 0$
Ω	Domínio

Apêndice A

h	Altura do Sol [$^{\circ}$]
I_0	Constante Solar 1353 W/m^2
$I_{0,ef}$	Constante Solar efectiva [W/m^2]
I_b	Radiação directa instantânea [W/m^2]
I_d	Radiação difusa instantânea [W/m^2]
I_h	Radiação global instantânea sobre uma superfície [W/m^2]
n	Número de dia do ano
n_r	Índice de refração da solução
P_b	Fracção de radiação directa transmitida abaixo do plano da água
P_d	Fracção de radiação difusa transmitida abaixo do plano da água
t	Tempo [s]
r	Ângulo de refração [$^{\circ}$]

Símbolos Gregos

δ	Declinação Solar [$^{\circ}$]
λ	Latitude do lugar [$^{\circ}$]
θ	Ângulo zenital [$^{\circ}$]
ρ	Coeficiente de reflexão
τ	Coeficiente de transmissão
ω	Ângulo horário [$^{\circ}$]

Apêndice B

P_s	Pressão de vapor saturado [Pa]
T_{amb}	Temperatura ambiente [$^{\circ}C$]
T_{ceu}	Temperatura do céu para efeitos radiativos [$^{\circ}C$]
T_{dp}	Temperatura do ponto de orvalho [$^{\circ}C$]
V_1, V_2, V_3	Constantes
ϕ	Humidade relativa [%]

Nomenclatura comum

Subescritos

x_d	valor da variável x na fronteira superior
x_0	valor da variável x na fronteira inferior
x_{est}	estado estacionário da variável x
\mathbf{x}_0	valor inicial da variável x
x_m	valor médio da variável x
x_{∞}	valor da variável x fora do Lago

Operadores

J	Jacobiano $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}$
∇	Gradiente $\nabla(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
∇^*	Operador Diferencial $\left(\frac{\partial}{\partial z}, 0, -\frac{\partial}{\partial x} \right)$

Capítulo 1

Lagos Solares

1.1 Contexto

A Direcção Geral de Energia financiou em 1981 um projecto para a construção de um Lago Solar de 1000 m² de área, situado no Posto Experimental de Pégões da Direcção Regional de Agricultura do Ribatejo e Oeste. Este Lago tinha como objectivo o aquecimento de duas estufas agrícolas.

O então LNETI teve a seu cargo a instrumentação do Lago Solar e o estudo dos processos físicos que ocorrem no seu interior. O protótipo construído pode ser observado na Figura 1.1. Ao longo de cerca de 10 anos foi pois possível obter um conhecimento quer teórico quer experimental relativo ao funcionamento de um Lago Solar.

Este conhecimento é essencial para a fundamentação do trabalho que se apresenta nesta tese, permitindo, nomeadamente efectuar comparações entre a análise desenvolvida e as conclusões tiradas durante a fase de funcionamento do Lago.

Inicia-se este capítulo com uma descrição da estrutura e do funcionamento de um Lago Solar, referindo-se alguns dos Lagos existentes e as respectivas aplicações, consideradas mais relevantes.

Prossegue-se com a descrição dos processos de transferência de calor e massa que ocorrem num Lago Solar, efectuando-se uma análise mais pormenorizada da sua zona intermédia. O capítulo finaliza com uma revisão histórica do problema de Rayleigh-Bénard.

1.1.1 O que é um Lago Solar

Um Lago Solar é um reservatório de água colector e armazenador de energia solar.

Para que seja possível a acumulação de calor, resultante da absorção de radiação solar, num reservatório que contenha um líquido, é necessário que se verifiquem duas condições.

A primeira condição consiste na transparência do líquido à radiação solar, por forma a que esta possa atingir as zonas mais profundas do reservatório e aí ser absorvida. Esta condição é facilmente conseguida quando se utiliza água ou uma solução aquosa de alguns sais, como fluido captador de radiação solar.

A segunda condição consiste na existência de um processo que favoreça a diminuição das perdas térmicas para a superfície o que pode ser conseguido com:

- uma cobertura apropriada da superfície do reservatório, por forma a diminuir as perdas térmicas associadas à evaporação e outras (coveção fundamentalmente);



Figura 1.1: Lago Solar de Pégões

- o impedimento de processos convectivos no reservatório.

Esta última solução é conseguida através da utilização de estruturas do tipo favo de abelha, colocadas à superfície, da utilização de "gels" transparentes ou da criação de gradientes de concentração salina.

É precisamente neste último processo que se baseiam os Lagos Solares de Gradiente de Salinidade. Este tipo de Lago tem sido o mais explorado em consequência da sua construção ser fácil e da sua manutenção ter um baixo custo, decorrente da utilização de substâncias comuns como a água e o sal.

1.1.2 Estrutura e funcionamento de um Lago Solar

Num Lago Solar podem-se distinguir três zonas bem definidas: uma zona superficial, uma zona intermédia ou zona gradiente e uma zona de armazenamento, como está indicado na Figura 1.2.

A zona superficial e a zona de armazenamento são zonas essencialmente convectivas podendo a temperatura ser aí considerada uniforme.

A zona superficial desenvolve-se de uma forma natural em consequência de efeitos exteriores e de trocas de calor do Lago com o meio ambiente. A sua espessura típica varia entre 0.2 m e 0.5 m.

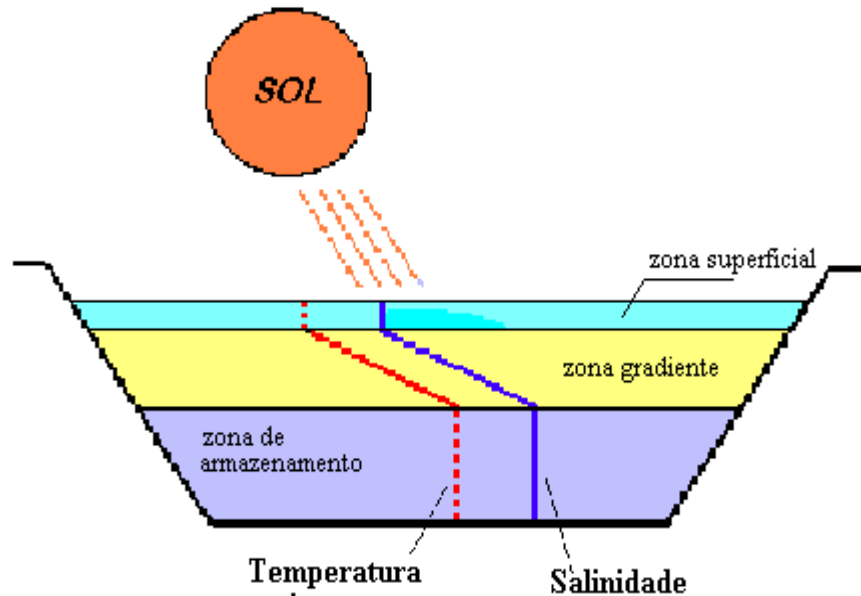


Figura 1.2: Estrutura de um Lago Solar de Gradiente salino

A finalidade da zona de armazenamento, zona inferior do Lago, é fazer a absorção e o armazenamento da energia solar. Esta zona atinge, por conseguinte, temperaturas mais elevadas. A sua espessura varia, quer com a quantidade de energia que se pretende armazenar, quer com as temperaturas que se pretendem obter, entre 0.5 m e 1.5 m.

Na zona intermédia a transferência de calor deve fazer-se apenas por condução, funcionando esta zona como isolante entre o fundo e a superfície.

Para que tal aconteça é estabelecido um gradiente de salinidade nesta zona, o qual impede a formação de correntes de convecção, permitindo o armazenamento da energia absorvida na zona mais profunda do Lago, donde pode ser, posteriormente, extraída para consumo. A espessura típica desta zona varia entre 1 m e 2 m.

A absorção de radiação no Lago conduz à formação de um gradiente térmico o qual contraria o efeito do gradiente salino. Coexistem pois na zona gradiente do Lago dois gradientes que funcionam em sentidos contrários, em termos de estabilidade: o gradiente salino ao impedir a formação de correntes de convecção tem um comportamento estabilizador do ponto de vista do aproveitamento energético, enquanto que o gradiente de temperatura, ao fomentar a homogeneização do Lago, apresenta um comportamento desestabilizador.

A não convectividade desta zona não pode, porém, ser mantida indefinidamente, devido quer a perturbações mecânicas quer a perturbações térmicas, dentro desta zona ou nas fronteiras com as outras zonas, ou ainda devido a fenómenos de dupla difusão. Estes últimos consistem na amplificação de pequenas perturbações, que ocorram na zona gradiente, em consequência do coeficiente de difusão térmica ser cerca de 100 vezes superior ao coeficiente de difusão molecular. Esta situação dá origem a movimento, induzido apenas por difusão, o qual pode originar em seguida movimento convectivo.

Como facilmente se conclui, o problema do armazenamento de energia térmica num Lago Solar reside na estabilidade da zona gradiente, o que implica o estudo pormenorizado da respectiva estabilidade e a consequente delimitação das situações de estabilidade.

1.1.3 Lagos Solares e suas Aplicações

Um Lago Solar de Gradiente de Salinidade combina num só dispositivo a absorção e o armazenamento da energia solar.

Embora o aproveitamento de Lagos naturais e a construção de Lagos Solares de gradiente salino artificiais tenha tido o seu "boom" a partir de 1980, em face dos resultados obtidos com as experiências realizadas por Tabor (1969) o conceito de Lago Solar remonta ao princípio do século.

Na realidade, foi em face da observação de temperaturas na ordem dos 70 °C atingidas no fundo do lago natural de Medve, na Hungria efectuada por Kalecsinsky (1902) que se pôs a hipótese da criação de Lagos Solares artificiais com vista à extracção de energia para fins quer domésticos quer industriais.

Segundo Kalecsinsky, o facto das temperaturas observadas atingirem valores tão elevados era consequência, quer da existência de uma grande concentração de cloreto de sódio no fundo do lago, quer da superfície do Lago ser alimentada por água doce, resultando um gradiente de salinidade que impedia a formação de correntes de convecção no lago.

Em 1948 Rudolph Bloch, citado por Joyce (1992), após estudos realizados no Mar Morto, desenvolveu a ideia de Kalecsinsky (1902) de aproveitamento dos Lagos Solares enquanto colectores e armazenadores de energia solar.

Surge assim, junto ao Mar Morto, o primeiro Lago Solar artificial, tendo atingido temperaturas da ordem dos 90 °C a 80 cm de profundidade (Weinberger (1964)). Com a sua utilização, iniciou-se uma fase de desenvolvimento teórico relacionado com a física dos processos inerentes aos Lagos Solares levada a cabo por Tabor (1969) e Tabor and Matz (1965), sendo Tabor o grande incentivador da criação de tais dispositivos.

Estes estudos de cariz mais teórico prosseguiram com as observações efectuadas no Mar Vermelho, Swallow (1965) e nalguns lagos salgados da Hungria, Weinberger (1964) e da Antártida, Neshyba (1987) e Hoare (1966).

A construção de Lagos Solares começou por ter como principal objectivo a produção de energia eléctrica por via térmica, processo este iniciado em Israel na continuação do trabalho levado a cabo por Tabor (1969).

O primeiro Lago Solar a ser construído com esta finalidade, surge em Ein Bokek junto ao Mar Morto, atingindo uma produção de 150 kW_e de pico, enquanto que o maior Lago, construído com o mesmo objectivo, situa-se em Bet Ha'arava com uma área de 250 000 m² para uma produção de 5 MW_e, Tabor and Matz (1965).

Também com a finalidade de produção de energia eléctrica, entra em funcionamento em 1986 o Lago Solar de El Paso, no Texas (3350 m² de área e 3,3 m de profundidade, 70 kW_e), Reid and Swift (1987). Este lago, além de ter sido o primeiro a demonstrar com sucesso a aplicabilidade dos Lagos Solares ao aquecimento industrial segundo Reid et al. (1989), foi um dos primeiros a produzir água pura a partir de água salgada, mediante uma unidade de dessalinização. Na sua zona de armazenamento o lago de El Paso atinge 65 °C no Inverno e 85 °C no Verão, enquanto que na zona superficial a temperatura varia entre os 5 °C e os 25 °C, seguindo de perto a variação da temperatura ambiente. A temperatura máxima obtida na zona de armazenamento foi de 90 °C em Julho de 1987.

Nos anos 80 encontra-se nos Estados Unidos um número significativo de Lagos Solares, quer naturais, quer artificiais, localizados em especial no Ohio, no Texas, em Illinois e na Califórnia, com diferentes características e diferentes objectivos, indo estes desde a

produção de energia eléctrica, ao aquecimento industrial em indústrias relacionadas com o mobiliário, a alimentação, o papel, as peles e os produtos químicos. No seu conjunto todos eles têm como denominador comum a existência nos locais de instalação de três características: um bom nível de insolação e existência de água e de sal.

Em Portugal desenvolveu-se a partir de 1981 e durante cerca de 10 anos, o estudo de um Lago Solar experimental situado em Pégões, tendo como objectivo o aproveitamento de energia solar para o aquecimento de estufas agrícolas (Joyce (1984), Collares-Pereira et al. (1981)) e cujas características constam da Tabela 1.1 .

área à superfície	1024 m ²
comprimento	32 m
largura	32 m
profundidade máxima	4 m
inclinação das paredes	45°
espessura da zona gradiente	1.5 m
altura da zona de armazenamento	2 m
quantidade de sal	174 × 10 ³ kg

Tabela 1.1: Características do Lago Solar de Pégões

Este Lago que continha uma solução de cloreto de sódio onde se estabeleceu um gradiente salino sobre uma zona homogénea, destinava-se essencialmente ao aquecimento de estufas agrícolas. Com vista ao estudo dos fenómenos associados a um Lago Solar de gradiente de salinidade, o lago foi dotado de um conjunto de instrumentação apreciável, a qual permitiu a recolha de dados, quer do clima da zona, quer do próprio funcionamento interno do Lago.

A partir dos anos 80 encontram-se Lagos Solares localizados em diferentes países, para aplicações diversas. Assim, em 1981 foi construído um Lago Solar no Canadá perto de Montreal, com uma superfície de 700 m² e uma profundidade de 2 m, cuja finalidade foi a produção de energia para aquecimento industrial, Crevier (1982) neste caso aplicado à secagem de cereais.

Em Itália construiu-se um Lago Solar nas salinas marítimas de Margarida de Savoia, Folchitto and Ruggi (1983) para purificação da água do mar. Com a mesma finalidade foram construídos Lagos Solares no Qatar (Posnansky (1987)) e na China (Wang et al. (1987)).

Em 1991 encontrava-se em funcionamento na Argentina um Lago Solar, também para uso industrial, neste caso aplicado ao tratamento de minérios, Lesino and Saravia (1991).

Em 1998 encontra-se em funcionamento, na Tunísia um Lago Solar com uma superfície de 17300 m² aplicado ao aquecimento de uma unidade de dessalinização, Ouni et al. (1998).

Aplicações dos Lagos Solares

Um Lago Solar absorve e armazena energia solar, durante todo o ano, podendo a zona de armazenamento ser dimensionada por forma a que a energia armazenada no Verão seja

utilizada no Inverno. Se se adicionar o facto de perder pouca energia para o solo, pode concluir-se que a escala de temperaturas que um Lago Solar fornece é apropriada para diferentes tipos de aplicações. Como exemplo de aplicações dos Lagos Solares refira-se:

- A dessalinização; ou seja, a obtenção de água pura a partir de água salgada;
- A produção de energia eléctrica;
- A produção de energia para aquecimento industrial;
- O aquecimento de água para piscinas de grandes dimensões;
- O aquecimento doméstico e de edifícios;
- O aquecimento de estufas e de outras aplicações agrícolas (secagem de frutos, irrigação);
- O aquecimento de viveiros.

As principais aplicações consistem, contudo, na produção de electricidade por via térmica French and Lin (1981), na utilização directa de calor de baixa temperatura e nos processos de purificação de sais.

Produção de electricidade por via térmica

Os maiores Lagos construídos têm, actualmente, como aplicação a produção de electricidade por via térmica. Este processo pode ser descrito sucintamente através da Figura 1.3.

Como se pode observar nesta Figura, o Lago capta e armazena a energia solar aquecendo a solução salina da zona de armazenamento. Esta solução é posteriormente extraída com o auxílio de uma bomba que a faz passar por um evaporador onde a solução quente (a cerca de 85°C) provoca a evaporação de um fluido orgânico que em seguida se expande numa turbina originando trabalho mecânico o qual é convertido em electricidade através de um gerador.

Posteriormente, o fluido orgânico, na fase de vapor, passa por um condensador onde é utilizada a solução da superfície do Lago, a qual se encontra aproximadamente à temperatura ambiente, para provocar o arrefecimento necessário à condensação.

Novamente no estado líquido, o fluido orgânico regressa ao evaporador onde o ciclo se encerra. O Lago funciona assim como fonte quente e fonte fria para o funcionamento do ciclo termodinâmico.

Como à superfície do Lago a temperatura é da ordem dos 30°C e no fundo é da ordem dos 85°C , o diferencial de temperaturas entre a fonte quente e a fonte fria apresenta-se pequeno (cerca de 55°C) e, conseqüentemente, o rendimento do ciclo é baixo.

Uma vez que se verifica que este tipo de aplicação só é economicamente viável a partir de uma potência instalada de 100 kW_e , situação que corresponde a um Lago com uma área superior a 26000 m^2 , Fynn and Short (1983), conclui-se que a produção

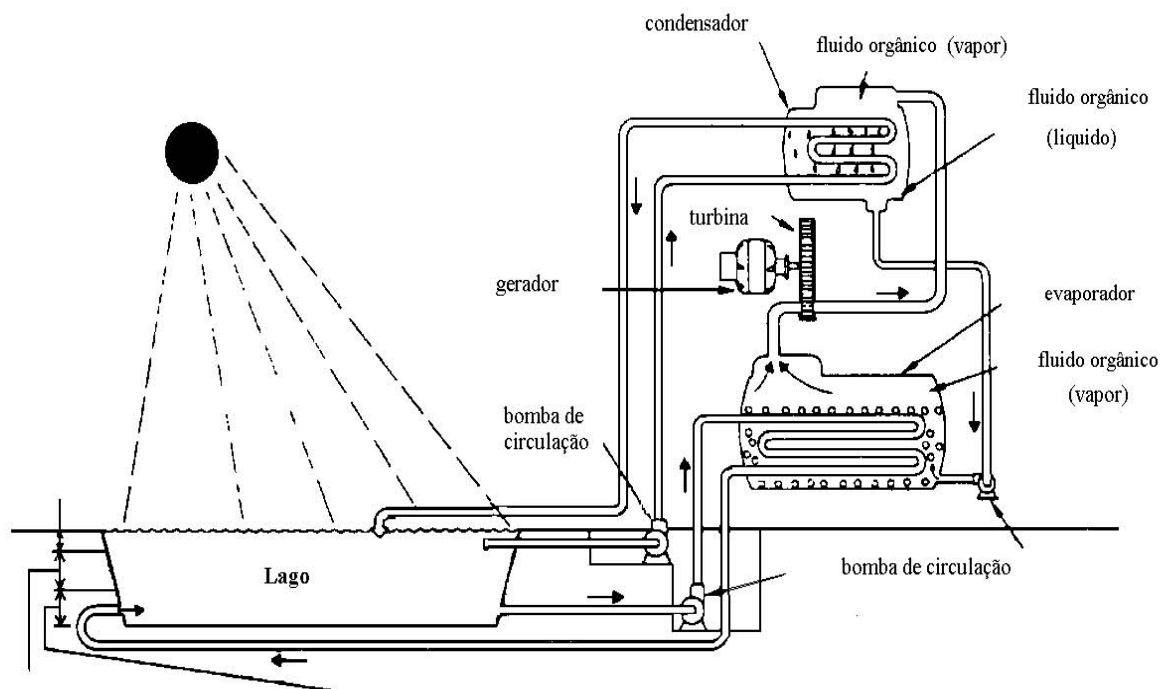


Figura 1.3: Produção de electricidade através de Lagos Solares

de energia através de um Lago Solar só é competitiva em locais onde o terreno seja de baixo custo, onde o sal seja barato e onde haja radiação solar suficiente.

De notar, porém, que a produção conjunta de electricidade e de calor de processo para a indústria pode ser uma alternativa economicamente aceitável.

Utilização directa de calor

Os Lagos Solares são dispositivos de grande armazenamento onde as variações diurnas da radiação solar e de temperatura não se fazem sentir. Por este motivo são indicados para o aquecimento de águas, Bryant (1979), de edifícios, de piscinas Wittenberg and Harris (1980), aquecimento de estufas, secadores e estábulos, Joyce (1984), Fynn and Short (1983).

A extração de energia do Lago pode ser feita basicamente por dois processos:

- extracção directa do fluido do Lago;
- Utilização de um permutador de calor interno na zona de armazenamento.

O Lago Solar experimental de Pégões o qual funcionou, como se referiu, com o objectivo de fornecer o aquecimento necessário a duas estufas agrícolas utiliza o segundo processo.

Descreve-se de seguida, sucintamente, o sistema de extração de energia térmica para as estufas, desenvolvido neste Lago.

Este dispositivo (sistema de extracção de energia térmica para as estufas) que pode ser observado na Figura 1.4 , era constituído por um permutador de calor, composto

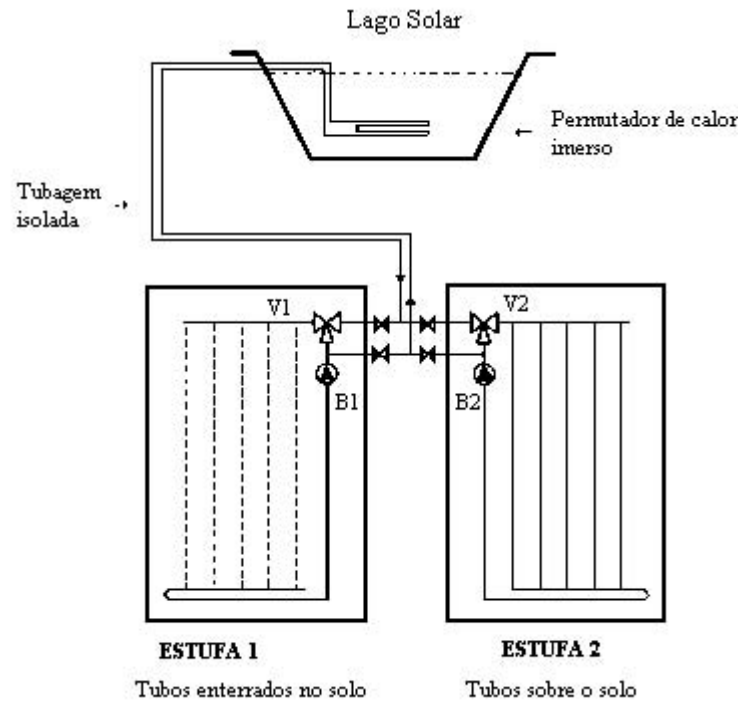


Figura 1.4: Extração de energia para estufas agrícolas

por um conjunto de tubos imersos horizontalmente no topo da zona de armazenamento (a cerca de 1.8 m do fundo do Lago).

No interior destes tubos circulava água doce, em circuito fechado, com os permutadores do interior das estufas. Esta circulação de água entre o Lago e as estufas era promovida por duas bombas (B1 e B2) as quais eram comandadas automaticamente pelo computador do sistema de aquisição de dados.

Dessalinização

No processo de dessalinização, se por um lado é necessária a existência de uma fonte de calor, por outro lado o produto de rejeição do dispositivo de dessalinização consiste numa solução salina de elevada concentração.

Uma vez que a matéria prima necessária à construção de um Lago Solar de gradiente salino é precisamente o produto rejeitado pela unidade de dessalinização e que a fonte de calor pode ser um Lago Solar, torna-se evidente a utilização deste dispositivo no processo de dessalinização.

Esta aplicação tem interesse para locais onde haja necessidade de dessalinizar água do mar tornando possível a construção de Lagos Solares com baixos custos.

Convém referir que os níveis dos gradientes de salinidade necessários à construção de um Lago Solar estão compreendidas entre os 26% de concentração salina, valor próximo da saturação, e os 4% a 5%. Desta forma, a própria água do mar, a qual apresenta uma concentração salina de 3% a 4%, pode funcionar como solução de superfície, não havendo necessidade de água doce para a construção do Lago.

Os sistemas de dessalinização consistem na associação de um Lago Solar com destiladores de efeito simples (ver Figura 1.5) ou com destiladores de multiefeito (ver

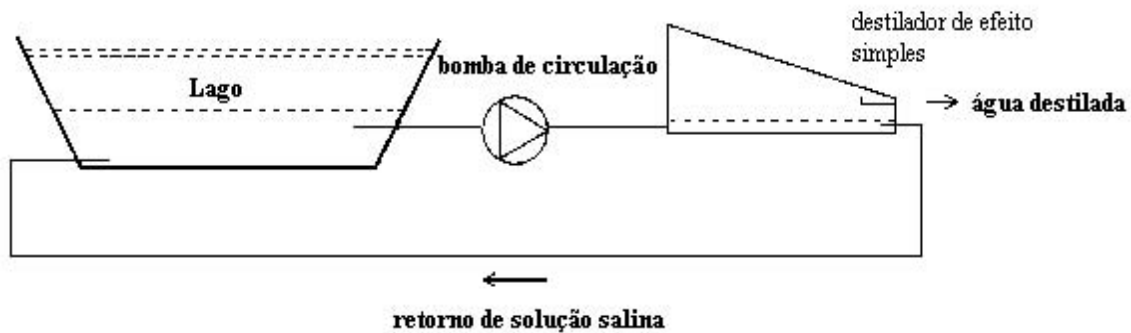


Figura 1.5: Processo de dessalinização utilizando um destilador de efeito simples

Figura 1.6) em que o calor latente da condensação é recuperado (ver Joyce (1991)),

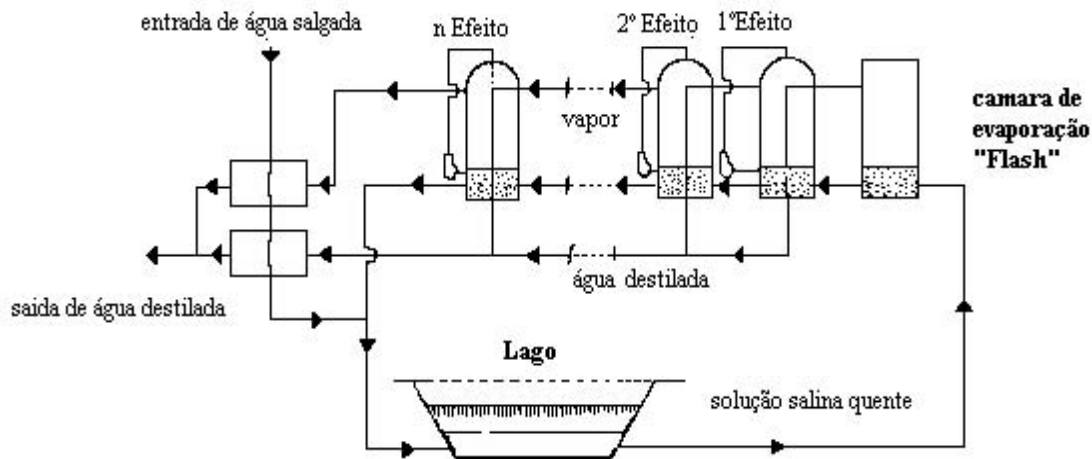


Figura 1.6: Processo de dessalinização utilizando um destilador de multiefeito

ou com câmaras de evaporação do tipo "flash".

O Lago pode funcionar também como fonte de calor aquecendo a água do mar a destilar. Nesta situação são utilizados permutadores de calor os quais promovem o aumento da evaporação ou misturam directamente a solução quente extraída do fundo com a água do mar.

Purificação de sais

Outro tipo de aplicação dos Lagos Solares reside na obtenção e purificação de sais. Neste tipo de aplicação o Lago é usado como parte integrante do processo de produção dos próprios sais com que é construído. Existem várias instalações em funcionamento, nomeadamente na Índia (Jain (1973)) e na Argentina (Lesino et al. (1982)) (purificação de sulfato de sódio para utilização na indústria do papel).

Têm sido propostos processos como a purificação de nitrato de sódio, a obtenção de nitrato de potássio (Doria et al. (1987)), a obtenção de cloreto de potássio a partir da silvinita (Doria et al. (1990)) e a obtenção do ácido bórico num Lago Solar de ácido sulfúrico (Doria et al. (1987)).

Outras aplicações

Outros tipos de aplicação de Lagos Solares que permanecem em estudo, podendo vir a ter um desenvolvimento interessante, são:

- a utilização de um Lago Solar como fonte de calor para um ciclo de absorção intermitente $H_2O - NH_3$, destinado à produção de frio. Este tipo de associação tem interesse na conservação de alimentos em países de boa radiação e de fracos recursos energéticos, como sejam alguns países africanos;
- a utilização de Lagos Solares no aquecimento de digestores anaeróbicos (Shen-sheng et al. (1987)) para a produção de biogás, permitindo o funcionamento dos digestores na temperatura óptima (cerca de $35^\circ C$) durante todo o ano.

1.2 Transferência de Calor e Massa num Lago Solar

1.2.1 Transferência de Calor: Condução, convecção e radiação

Os processos de transferência de calor que podem ocorrer num Lago Solar são a condução ou difusão térmica, a convecção e a radiação. Interessa pois fazer uma análise, resumida, destes processos, detalhando os aspectos mais relevantes para o estudo do funcionamento de um Lago Solar de Gradiente de Salinidade.

Condução

A condução consiste num processo de transferência de energia sob a forma de calor por agitação molecular, num meio sólido ou num fluido estacionário.

Para exemplificar este processo considere-se a Figura 1.7, na qual se representam duas

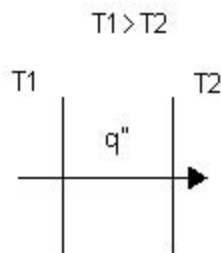


Figura 1.7: Condução

paredes a diferentes temperaturas, T_1 e T_2 .

A taxa de transferência de calor por condução é proporcional à área normal à direcção de transferência e ao gradiente térmico de temperatura segundo essa direcção, designando-se a constante de proporcionalidade por condutividade térmica. Esta constante é uma

propriedade do material, a qual seá designada pela letra k com um índice indicativo do material a que se refere; por exemplo a condutividade da água será indicada por k_w .

Convecção

A convecção é um processo de transferência de energia associada ao movimento de fluido, envolvendo transferência quer a nível macroscópico, quer a nível molecular. O calor é transferido entre uma superfície e um fluido em movimento ou internamente a um fluido.

Como exemplo de um processo de convecção, a Figura 1.8 traduz a transferência de

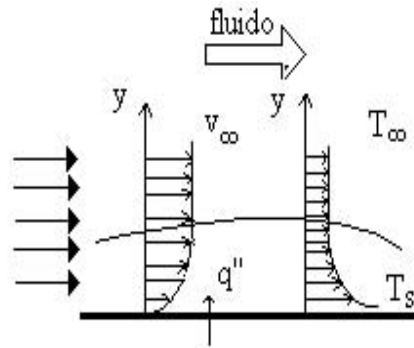


Figura 1.8: Convecção

calor por convecção que ocorre entre uma superfície sólida e um fluido quando os dois se encontram a diferentes temperaturas. A Figura 1.8 refere um escoamento sobre uma superfície aquecida, mostrando a camada limite da velocidade. Se as temperaturas da superfície e do fluido forem diferentes existe uma região do fluido onde a temperatura varia de T_s em $y = 0$ a T_∞ no fluido, formando-se uma camada limite para a temperatura.

Nos processos convectivos podem distinguir-se os processos de convecção forçada, associados a um movimento do fluido forçado exteriormente (a força exterior pode ser, por exemplo, produzida por um ventilador, uma bomba ou pela acção do vento), ou os processos de convecção natural, decorrentes de um movimento de fluido associado a diferenças de temperatura, (os movimentos do fluidos são consequência de forças de impulsão decorrentes de variações de densidade).

Se a transferência de calor envolver mudança de fase (vaporização ou condensação) tem-se ainda um processo de convecção com mudança de fase.

A transferência de calor por convecção é caracterizada pela relação entre o processo de transferência de calor efectuado pelo movimento do fluido e o processo de transferência de calor por condução no fluido. Esta relação é traduzida pelo número de Nusselt, Nu .

De uma forma geral a condutividade térmica dos fluidos é pequena (com a excepção dos metais líquidos) pelo que uma transferência convectiva forte depende largamente de um forte movimento do fluido. O coeficiente de transferência de calor por convecção é designado por h_d , constando alguns dos seus valores típicos da Tabela 1.2.

A determinação deste coeficiente, o qual depende da geometria do problema, das condições de escoamento (se o tipo de escoamento é laminar ou turbulento) e das propriedades do fluido (como sejam a densidade, a condutividade, o calor específico e a viscosidade), é um dos objectivos de qualquer problema de convecção.

Processo	h_d [W/m ² K]
convecção natural	
gases	2-25
líquidos	50-1 000
convecção forçada	
gases	25-250
líquidos	50-20 000
conv. c/ mudança de fase vaporização ou condensação	2500-100000

Tabela 1.2: Valores típicos para os Coeficientes de Transferência de calor por Convecção

O número de Nusselt, Nu , que relaciona o processo convectivo com o processo condutivo é um número adimensional que resulta da combinação do coeficiente de convecção h_d com um comprimento significativo L , com a condutividade térmica do fluido k_f , na forma:

$$Nu = \frac{h_d L}{k_f} \quad (1.1)$$

Um valor elevado de Nu corresponde a um processo convectivo intenso.

No processo de convecção é também importante o conhecimento do número adimensional de Prandtl, Pr , o qual é uma medida de eficiência relativa dos transportes de momento e de energia.

Este número relaciona a difusibilidade de momento, ν (viscosidade cinemática) com a difusibilidade térmica α através da relação:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.2)$$

definindo-se a viscosidade de momento e a difusibilidade térmica, respectivamente, por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{k_f}{\rho C_p} \quad (1.3)$$

onde μ designa a viscosidade, ρ a densidade e C_p o calor específico. Pode então escrever-se:

$$Pr = \frac{C_p \mu}{k_f} \quad (1.4)$$

Em geral, para a resolução dos problemas de transferência de calor por convecção é suficiente utilizar formulações empíricas entre os diferentes parâmetros adimensionais, obtidos a partir de resultados experimentais.

Radiação

No processo de transferência por radiação o calor é transferido por ondas electromagnéticas, não necessitando de qualquer meio físico. Este processo de transferência tem características ondulatórias podendo ser caracterizada por um comprimento de onda ou por uma frequência de radiação.

Todos os corpos emitem radiação para as superfícies que se encontram no seu campo de visão, dependendo a radiação emitida, para um dado comprimento de onda, da respectiva emissividade espectral e da radiação emitida pelo corpo negro, à mesma temperatura. A emissividade, ϵ , de uma superfície é a razão entre a quantidade de radiação emitida pela superfície e a quantidade de radiação emitida pelo corpo negro, à mesma temperatura. Exemplos de processos de transferência de calor por radiação são a radiação solar visível ou a radiação térmica emitida por uma superfície aquecida.

No caso de um Lago Solar há que diferenciar o processo de absorção de radiação solar no interior do Lago (baixo comprimento de onda) do processo de transferência de calor por radiação da superfície do Lago (grande comprimento de onda). De facto como a água é fortemente absorvedora dos grandes comprimentos de onda, que correspondem às temperaturas em jogo, o processo de absorção de radiação solar dentro do Lago pode ser tratado como se se tratasse de uma geração interna de calor local.

É pois necessário que o utilizador de um Lago Solar possua a informação relativa à quantidade de energia susceptível de ser convertida e eventualmente armazenada, e para tal torna-se relevante o conhecimento da quantidade de radiação solar que atinge a superfície do Lago e da forma como ela é quer reflectida à superfície, quer absorvida no Lago.

Como se referiu, uma parte da radiação incidente na superfície do Lago é absorvida na água. Ao ser absorvida a radiação solar sofre uma atenuação em consequência de processos como a absorção e a dispersão pelas moléculas de água, absorção devida a sais dissolvidos e/ou a microorganismos em suspensão e dispersão provocada por partículas em suspensão. A consideração de todos estes processos em simultâneo torna difícil uma análise teórica global da transmissão de radiação num Lago Solar, existindo vários modelos de absorção de radiação solar numa camada de fluido que analisam a transmissão de radiação, sendo os mais importantes, da autoria de Rabl and Nielsen (1975), Hull (1980) e Kirk (1988).

Estes estudos contemplam, de um modo geral a hipótese de "água pura", ou seja, não prevêm a existência de sais dissolvidos. Os coeficientes de extinção propostos nestes modelos foram obtidos a partir de medições efectuadas em água pura. A transmissão de radiação solar através da água pura, traduz o limite superior de transmissão de radiação num Lago Solar.

No entanto, esta situação não corresponde à situação que ocorre num Lago Solar real. A experiência obtida com o Lago Solar de Pégões, no que respeita a absorção de radiação, mostra que esta é dependente quer da presença de algas e microorganismos, quer de poeiras e partículas dispersas, não sofrendo, contudo, grande influência dos sais dissolvidos. Em Joyce (1992) considera-se, para a determinação da atenuação de radiação dentro do Lago, que a absorção e a dispersão podem ser tomadas em conjunto de acordo com a relação:

$$q(z) = \exp(-\mu_e z) \quad (1.5)$$

onde μ_e designa o coeficiente de extinção (soma do coeficiente de absorção integrado para todo o espectro com o coeficiente de dispersão). Esta relação será utilizada nos Capítulos 5 e 6.

O presente trabalho considera o efeito da absorção de radiação solar no Lago o qual está descrito com maior detalhe no Apêndice A. Neste Apêndice tecem-se algumas con-

siderações sobre a Radiação Solar em geral e detalha-se a forma como a mesma interage com o Lago.

Por outro lado e pelo facto da superfície do Lago estar a uma temperatura diferente do zero absoluto está por sua vez a trocar energia por radiação com os corpos envolventes. Devido ao facto da temperatura da superfície ser aproximadamente igual à temperatura ambiente os comprimentos de onda desta radiação estão na faixa dos infravermelhos (grandes comprimentos de onda).

1.2.2 Análise da zona gradiente de um Lago Solar: dupla difusão e estabilidade

Dupla difusão

A zona intermédia de um Lago Solar consiste numa camada de fluido onde é estabelecido um gradiente salino. Este gradiente é imposto artificialmente por forma a que a concentração salina aumente com a profundidade (gradiente vertical negativo).

A absorção de radiação solar ao longo de toda a camada de fluido implica a formação de um gradiente térmico, com o mesmo sentido do gradiente salino, ou seja, também negativo.

Observe-se que a formação deste gradiente é semelhante ao que se passaria numa camada de fluido que estivesse aquecida por baixo, motivo pelo qual a zona intermédia, ou gradiente, de um Lago Solar tem vindo a ser descrita na análise efectuada por diferentes autores destacando-se Veronis (1968), Schechter et al. (1981) e Turner (1985), como uma camada de fluido aquecida por baixo.

Esta descrição não é contudo a mais realista uma vez que, na verdade, não faz intervir o processo de absorção de energia solar ao longo da camada.

A análise que se efectua no presente trabalho leva em linha de conta o efeito da absorção de radiação solar, na tentativa de tornar a análise da zona gradiente do Lago Solar mais próxima da realidade.

O facto de existirem dois gradientes na zona intermédia torna-a potencialmente candidata ao desenvolvimento de instabilidades uma vez que a temperatura e o sal possuem coeficientes de difusão bastante diferentes.

Ocorrem fenómenos de dupla difusão quando, numa camada de fluido, coexistem pelo menos dois componentes com coeficientes de difusão diferentes. Nesta situação dá-se uma variação espacial dos componentes, variação esta iniciada pelo transporte mais rápido do componente que possui o coeficiente de difusão mais elevado.

Em função do gradiente que inicia o transporte difusivo, assim se obtêm dois tipos de fenómenos de dupla difusão.

Se for o gradiente salino a iniciar e a liderar o processo, a transferência na camada de fluido é efectuada por difusão molecular e formam-se "dedos de sal". Este fenómeno tem sido observado nos Oceanos onde se encontram soluções mais quentes e salgadas sobrepostas a soluções menos concentradas e mais frias.

No caso dos Lagos Solares o gradiente de temperaturas é aquele que lidera o processo, originando um transporte vertical mais rápido por difusão térmica. Este transporte pode amplificar pequenas instabilidades existentes na camada de fluido, as quais, ao fim de certo

tempo, são suficientes para conduzirem à formação de correntes de convecção, dando-se a destruição do gradiente, estabilizador, de salinidade.

Este tipo de instabilidades, foi observado por Turner (1974), Turner (1985) em sistemas com dupla difusão, tendo este autor feito a descrição deste tipo de movimento e determinado as condições em que o mesmo pode ocorrer.

Assim, segundo Turner (1985) podem ocorrer fenómenos de dupla difusão quando se verifica pelo menos uma das seguintes condições:

- O fluido contém pelo menos duas componentes com diferentes difusibilidades moleculares, cada uma delas afectando a densidade do fluido. Estas componentes podem ser, como já foi referido, um soluto e a temperatura, ou solutos diferentes;
- Quando existem fenómenos cruzados de difusão, como, por exemplo, o aparecimento de um fluxo térmico em resultado de um gradiente de um soluto ou o aparecimento de um fluxo molecular resultante de um gradiente térmico (termodifusão).

Embora ambas as situações possam ocorrer num Lago Solar é a primeira situação que tem mais importância uma vez que os coeficientes cruzados (Soret e Dufour) são em geral pequenos no caso das soluções salinas de cloreto de sódio. No caso de um Lago Solar, o fenómeno de dupla difusão (Baines and Gill (1969)) que ocorre na zona gradiente pode ser entendido com o auxílio da Figura 1.9. Esta figura apresenta em a) e c) as situações

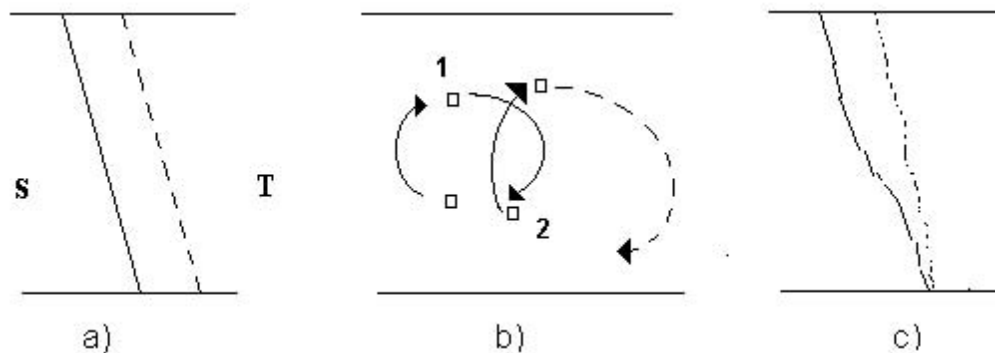


Figura 1.9: Efeito da dupla difusão na zona gradiente

inicial e final dos perfis de temperatura e de salinidade naquela zona e apresenta em b) o movimento de um elemento de fluido da zona gradiente.

Inicialmente, ambos os perfis têm uma inclinação negativa. Nesta situação, correspondente à Figura 1.9 a), o gradiente salino tem uma acção estabilizadora mas o gradiente de temperatura possui uma acção desestabilizadora: no topo o fluido está menos quente e menos salgado e na fronteira inferior o fluido possui uma maior concentração e encontra-se a uma temperatura superior. As transferências de calor e de massa dão-se apenas por difusão.

Na Figura 1.9 b) um dado elemento de fluido ascende na zona gradiente, por efeito de uma pequena perturbação, deslocando-se, sem acção viscosa, para uma posição (1) onde a temperatura e a concentração são inferiores. Como o coeficiente de difusão da temperatura é superior ao coeficiente de difusão molecular, o elemento de fluido arrefece rapidamente sem contudo diminuir a concentração. Fica assim mais denso deslocando-se, por acção da gravidade, para uma posição (2) abaixo da inicial. Este processo de

transferência por difusão repete-se, traduzindo-se na amplificação de pequenas variações espaciais dos elementos de fluido na zona gradiente. Ao fim de um dado período de tempo o gradiente de salinidade já não consegue evitar o efeito destabilizador do gradiente de temperatura e acaba por ser parcialmente destruído, o que arrasta a diminuição das características de isolante térmico da zona gradiente (Figura 1.9 c)).

A principal preocupação a ter em linha de conta é pois, manter o Lago como dispositivo não convectivo o que se traduz por manter a zona gradiente estável.

Por sua vez, manter a zona gradiente estável consiste em manter um gradiente de concentração suficientemente forte, de forma a reduzir ao máximo as possibilidades de desenvolvimento de instabilidades de dupla difusão.

Estabilidade: configurações dos dois gradientes

A Figura 1.10 mostra as configurações dos gradientes de temperatura e salinidade sus-

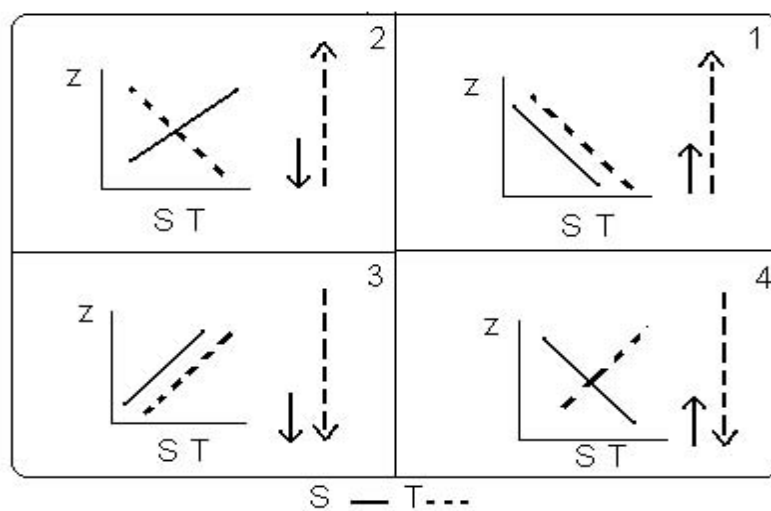


Figura 1.10: Possíveis configurações dos gradientes de temperatura e salinidade

ceptíveis de ocorrerem num Lago Solar, com a indicação do sentido e intensidade relativa dos dois fluxos difusivos.

No primeiro quadrante ambos os gradientes são negativos, situação que corresponde à existente na zona gradiente do Lago. Neste quadrante o gradiente salino tem uma acção estabilizadora do ponto de vista gravítico, uma vez que aumenta a densidade nas camadas inferiores. O gradiente de temperaturas por seu lado tem uma acção destabilizadora uma vez que o seu efeito é aumentar a densidade nas camadas superiores. No seu conjunto este quadrante exhibe a situação do Lago que corresponde a um regime difusivo, pertencendo o maior coeficiente de difusão à componente destabilizadora.

Refira-se ainda que, se se verificar qualquer pequena perturbação, o gradiente de densidade resultante dos dois gradientes estabelecidos, pode não ser suficientemente forte para impedir a formação de movimento convectivo.

A energia potencial associada ao gradiente térmico pode implicar a passagem de um regime difusivo para um regime convectivo, aumentando os fluxos de calor e massa.

Este fenómeno está na origem das chamadas zonas convectivas, internas à zona gradiente, contribuindo para uma diminuição das características isolantes desta zona.

Retome-se a Figura 1.10 e considere-se agora o terceiro quadrante. Este apresenta uma situação inversa à exibida pelo primeiro quadrante, uma vez que os gradientes têm ambos sinal positivo. A temperatura é inferior no topo da camada, sendo o gradiente térmico o estabilizador. A maior densidade de concentração salina está no topo da camada sendo o gradiente salino o desestabilizador.

Neste caso a energia necessária aos movimentos convectivos provém da energia potencial armazenada no gradiente de salinidade.

Nesta situação o fenómeno de dupla difusão pode originar movimentos convectivos conhecidos por "Dedos de Sal" (Turner (1985)) mesmo em condições de estabilidade estática, isto é mesmo numa situação em que o gradiente de densidade não é adverso.

Nos segundo e quarto quadrantes têm-se, respectivamente, situações de instabilidade estacionária (regime convectivo com ambos os gradientes desestabilizadores) e de estabilidade (regime difusivo, com ambos os gradientes estabilizadores).

As condições a partir das quais se dá o início de movimento convectivo têm vindo a ser determinadas por diferentes autores, dos quais se salientam Veronis (1968), Baines and Gill (1969), Schechter et al. (1981) e Shirtcliffe and Turner (1970) os quais analisaram o comportamento da zona gradiente de um Lago Solar, em termos de estabilidade. Para a determinação destas condições utilizaram diferentes técnicas na resolução do sistema de equações diferenciais não lineares que caracteriza o problema da dupla difusão.

Veronis (1968), por exemplo, linearizou essas equações mostrando que num sistema deste tipo a estabilidade é dependente de três grupos adimensionais: o número de Rayleigh térmico R_T , o número de Rayleigh salino R_S e o quociente τ entre os números de Prandtl e de Schmidt. Este quociente reduz-se à razão entre as difusibilidades térmica K_T e salina K_S .

Os números de Rayleigh térmico e salino definem-se, respectivamente, por:

$$R_T = \frac{gd^3\alpha\Delta T}{\nu K_T}, \quad R_S = \frac{gd^3\beta\Delta S}{\nu K_T} \quad (1.6)$$

A partir do número de Schmidt:

$$Sc = \frac{\nu}{K_S} \quad (1.7)$$

e do número de Prandtl, obtém-se a razão τ :

$$\tau = \frac{Pr}{Sc} = \frac{K_S}{K_T} \quad (1.8)$$

Os números de Rayleigh podem ser positivos ou negativos de acordo com o sinal das diferenças de temperatura ΔT e de salinidade ΔS . A Figura 1.11 representa a estabilidade das diferentes configurações relativas dos dois gradientes no plano (R_S, R_T) , sendo possível estabelecer uma analogia com a Figura 1.10.

Como será focado mais em pormenor no Capítulo 3, os pontos de estabilidade estacionária são os que se situam abaixo da recta $R_T = R_S$, a qual divide os quadrantes 1 e 3.

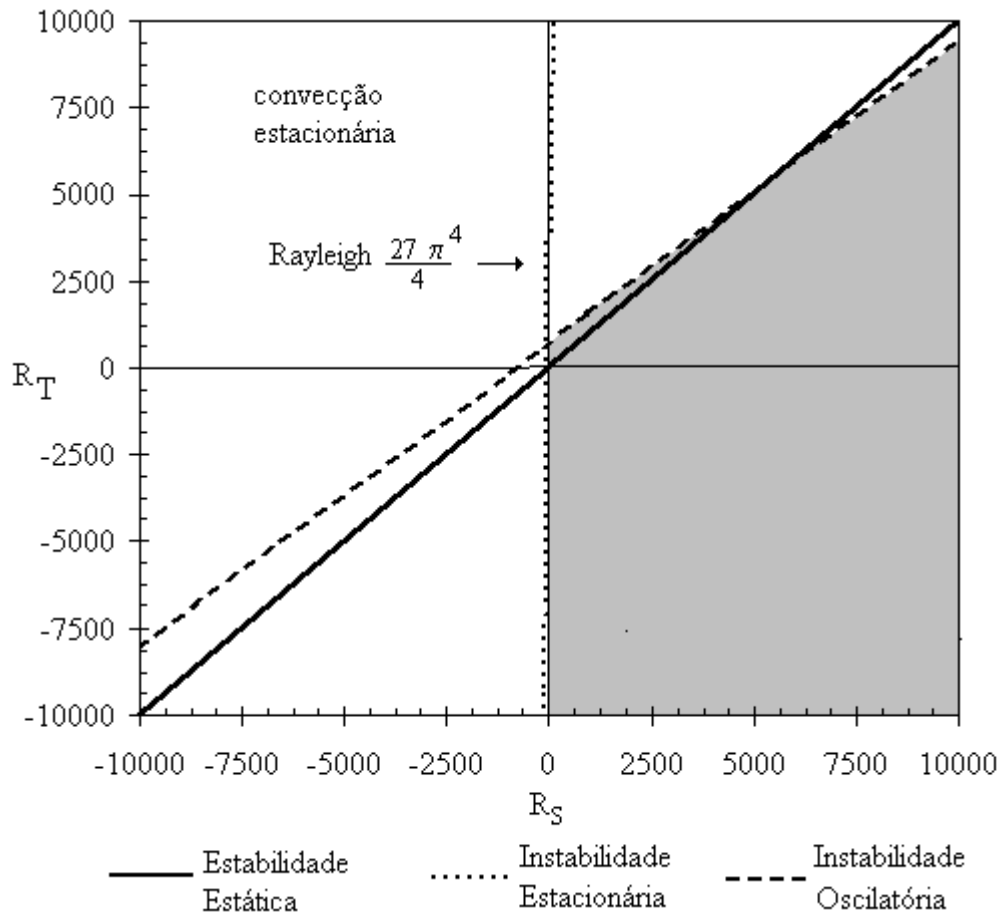


Figura 1.11: Quadrantes de estabilidade

A referida zona (situada abaixo da recta) corresponde a gradientes de densidades estáveis do ponto de vista estático. Esta Figura será referida no Capítulo 3 após a dedução dos limites de estabilidade para o problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes.

É possível visualizar alguns dos perfis de temperatura e de salinidade que se estabeleceram no Lago Solar de Pégões, a partir da informação recolhida durante o tempo em que esteve a funcionar.

Apresentam-se, pois, de seguida alguns dos perfis de temperatura e de salinidade observados, bem como os gráficos referentes á análise de estabilidade, efectuada em Joyce (1992).

O critério de estabilidade empregue é o critério de estabilidade dinâmica de Veronis dado por:

$$R_T < \frac{Pr + \tau}{Pr + 1} R_S \quad (1.9)$$

As Figuras 1.12 e 1.13 mostram os perfis de temperatura e salinidade obtidos 14 dias após o início de funcionamento (o qual ocorreu em Novembro de 1982) sendo bem clara a diferenciação das três zonas do lago.

O gradiente salino imposto revela-se adequado a um bom funcionamento do Lago. Ao fim de duas semanas de funcionamento observa-se uma subida de temperatura na

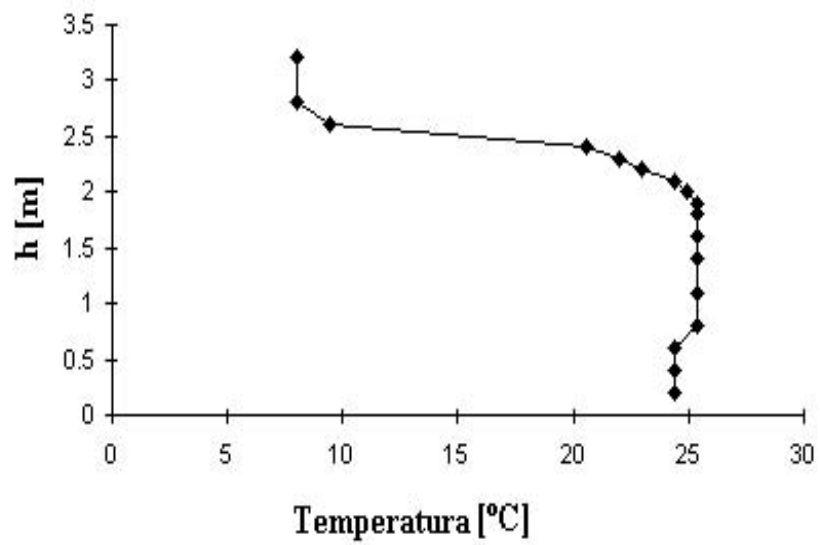


Figura 1.12: Perfil de Temperatura obtido em Pégões 30/11/82

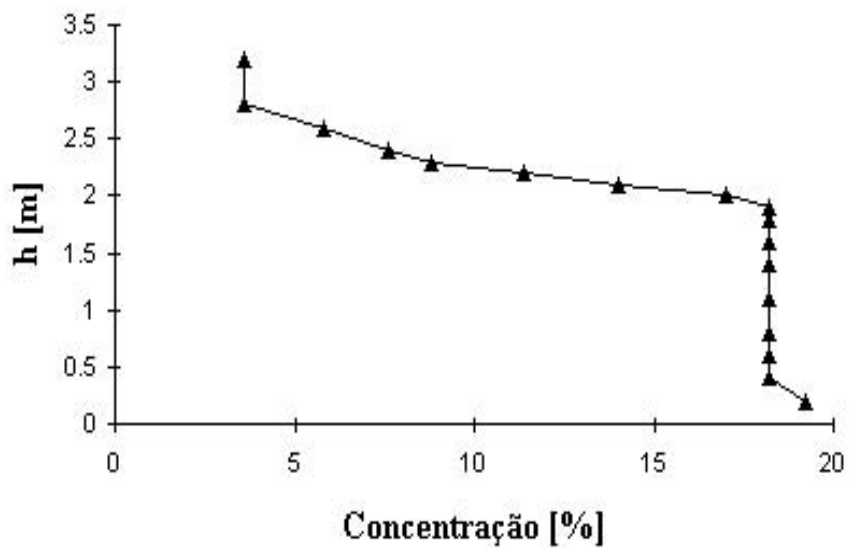


Figura 1.13: Perfil de Salinidade obtido em Pégões 30/11/82

zona de armazenamento (de 0 a 1.9 m de altura), uma estrutura bem delineada em três zonas e a coincidência entre as respectivas fronteiras. Na zona de armazenamento, a temperatura aumentou mantendo-se praticamente homogénea ocorrendo posteriormente apenas um ligeiro aumento de temperatura junto ao fundo em consequência do gradiente de salinidade existente.

A Figura 1.14 mostra o diagrama de estabilidade obtido em 30/11/82. Quanto mais à

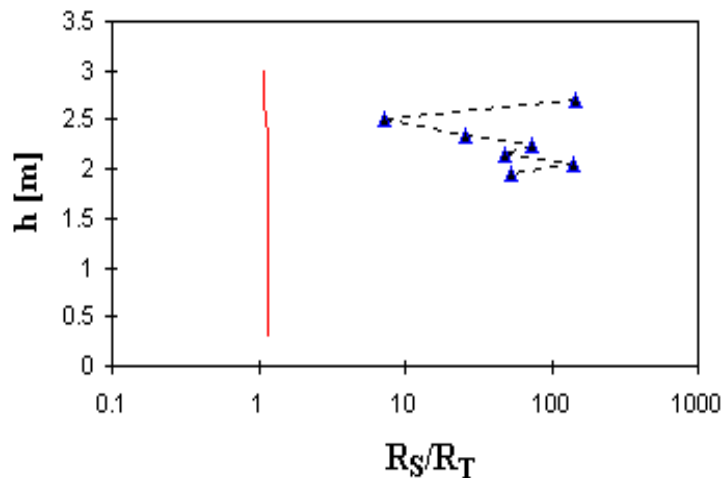


Figura 1.14: Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 30/11/82

direita da recta que traduz o limite de estabilidade se situam os pontos calculados, mais longe se está do início de convecção; quando os pontos estiverem próximos da recta de estabilidade é porque o processo está prestes a tornar-se instável.

Assim, na Figura 1.14 pode observar-se que a zona mais susceptível ao início de movimento convectivo se situa na parte superior da camada intermédia.

A Figura 1.15 e a Figura 1.16 mostram os perfis de temperatura e salinidade obtidos em 28/12/82. Nestas figuras pode observar-se que à medida que o Lago aquece se está mais perto do início de instabilidades. A zona de armazenamento exhibe uma concentração salina quase homogénea, facto que se reflecte num perfil de temperaturas também homogéneo, resultante de um processo convectivo intenso.

Este processo resulta de uma forte absorção de radiação solar no fundo, a qual origina um gradiente térmico intenso que inicia o processo de convecção, apesar da existência de um pequeno gradiente salino, junto ao fundo. A zona gradiente (de 1.9 m a 2.8 m) possui a configuração dos gradientes correspondentes ao primeiro quadrante da Figura 1.15, sendo uma zona estável (não convectiva) como se pode verificar pela manutenção do gradiente térmico. A Figura 1.17 mostra o diagrama de estabilidade obtido em 28/12/82, podendo observar-se uma diminuição do diferencial de estabilidade na parte superior da zona gradiente, resultante do aquecimento sofrido pelo Lago.

Os perfis apresentados distam cerca de um mês, tendo sido obtidos durante o primeiro ano de funcionamento do Lago. Com vista a apresentar uma situação diferente em termos de estabilidade, referem-se de seguida alguns perfis obtidos após três anos de funcionamento.

A Figura 1.18 e a Figura 1.19, mostrando os perfis de temperatura e salinidade obtidos

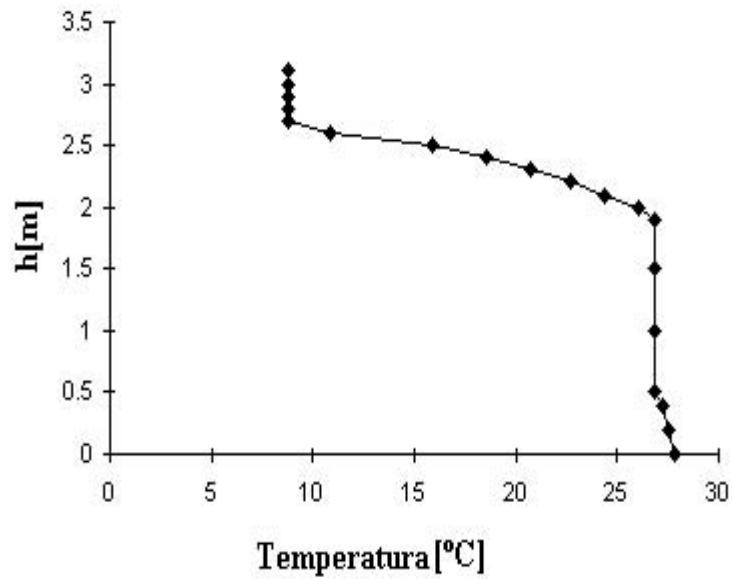


Figura 1.15: Perfil de Temperatura obtido em Pégões em 28/12/82.

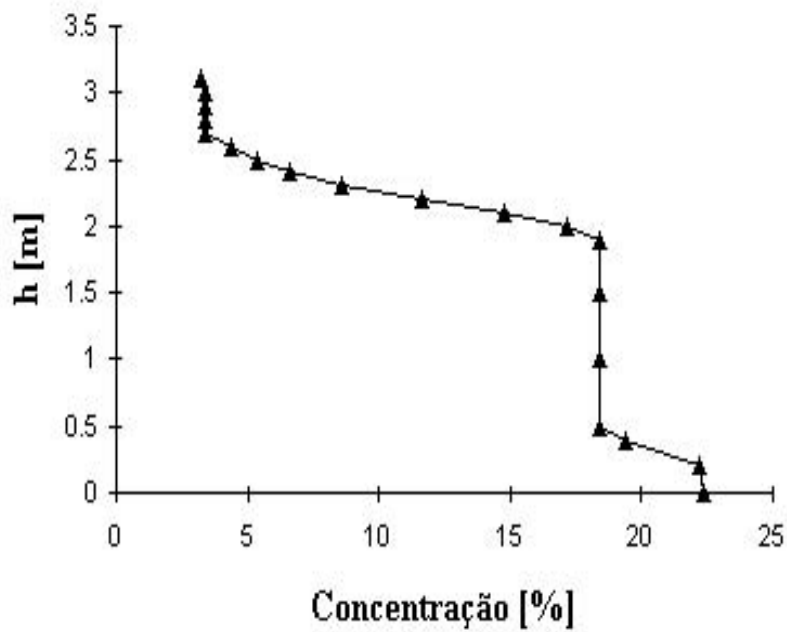


Figura 1.16: Perfil de Salinidade obtido em Pégões em 28/12/82.

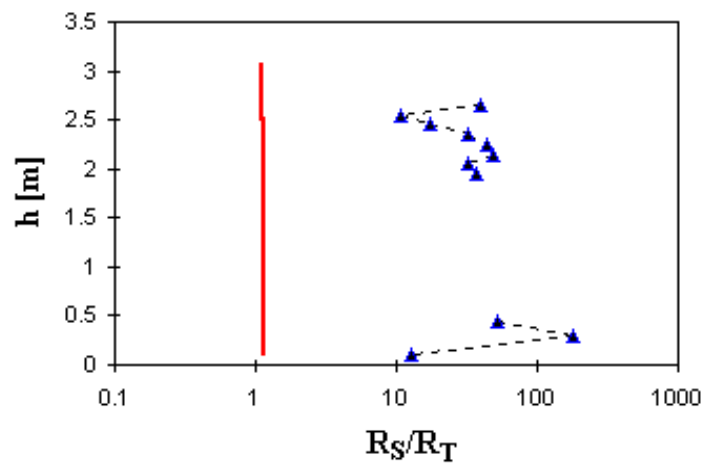


Figura 1.17: Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 28/12/82

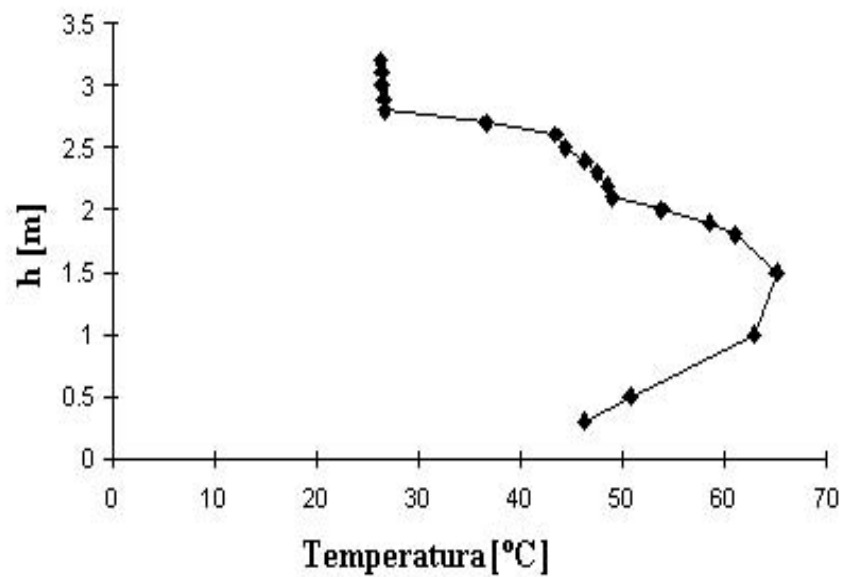


Figura 1.18: Perfil de Temperatura obtido em Pégões em 7/7/85

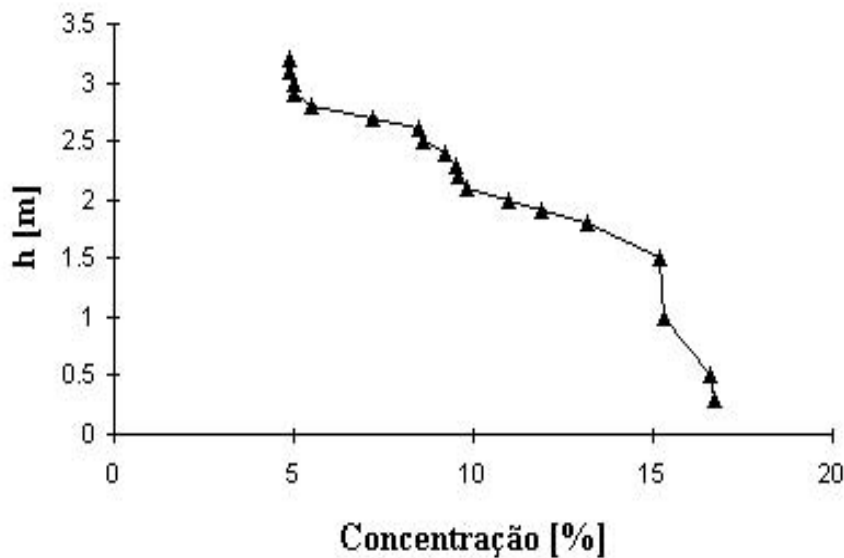


Figura 1.19: Perfil de Salinidade obtido em Pégões em 7/7/85

em 7/7/85, reflectem um aumento da espessura da zona superficial, o qual se deve ao facto do gradiente de salinidade ter sido enfraquecido (nomeadamente por acção do vento).

Na zona gradiente verifica-se uma degradação dos perfis de temperatura e salinidade com o aparecimento de diferentes gradientes. Acentua-se igualmente o carácter não convectivo da zona de armazenamento, com o pico da temperatura a ser atingido à altura de 1.5 m. Verifica-se que o Lago continuou a aquecer tendo atingido temperaturas elevadas (perto dos 65°C) nesta zona. Deixa de existir fronteira entre a zona de armazenamento e a zona gradiente.

A Figura 1.20 mostra o diagrama de estabilidade relativo à data 7/7/85, onde a zona

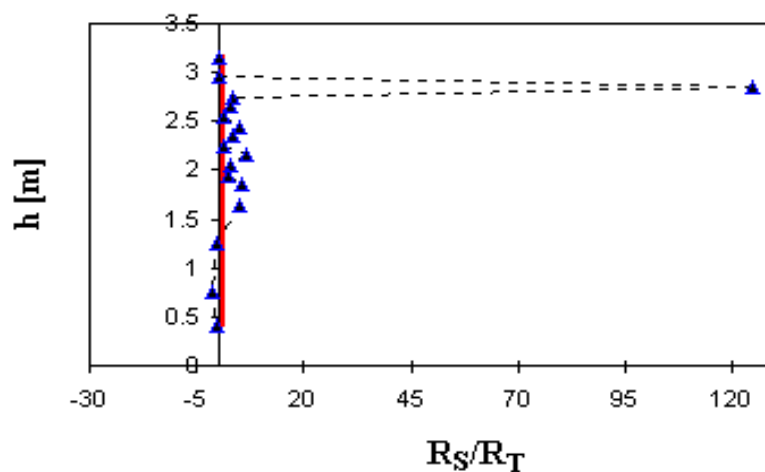


Figura 1.20: Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 7/7/85

gradiente apresenta valores de estabilidade no limite. A existência de pontos no semi-plano negativo de R_S/R_T correspondentes ao gradiente térmico na zona de armazenamento,

próximos da recta $R_S/R_T = 0$ anuncia uma evolução no sentido do início de convecção.

A Figura 1.21 e a Figura 1.22 mostram os perfis obtidos em 20/8/85. Estas Figu-

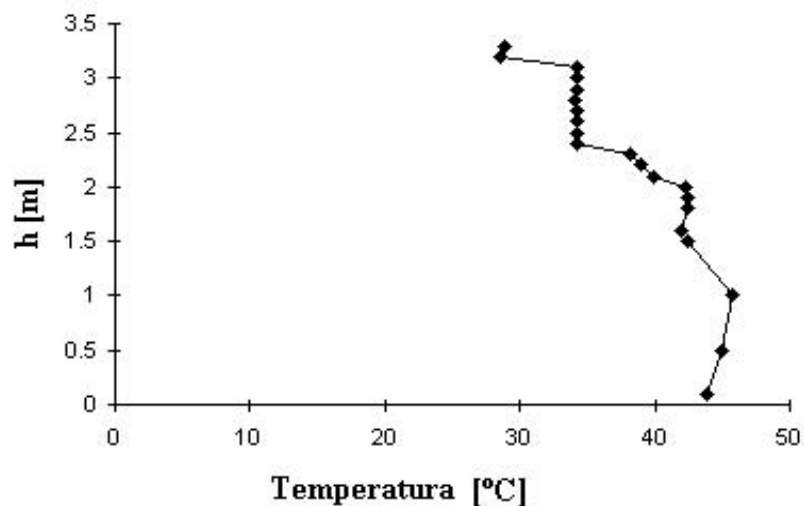


Figura 1.21: Perfil de Temperatura obtido em 20/8/85

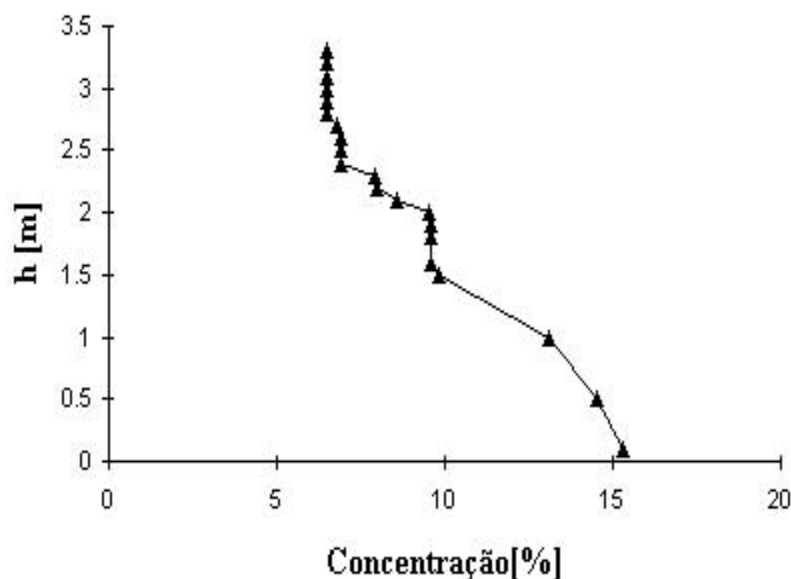


Figura 1.22: Perfil de Salinidade obtido em 20/8/85

ras exibem as várias zonas de convecção internas que diminuíram o isolamento do Lago fazendo-o arrefecer, provocando conseqüentemente um aumento de estabilidade. Este facto revela a capacidade de autoregulação do Lago conseguida à custa da formação de zonas convectivas internas, as quais terão que ser posteriormente reparadas. O arrefecimento observado é conseqüência da degradação do gradiente salino e após a sua ocorrência foi necessário proceder a operações de recuperação do gradiente, adicionando sal nas zonas mais profundas.

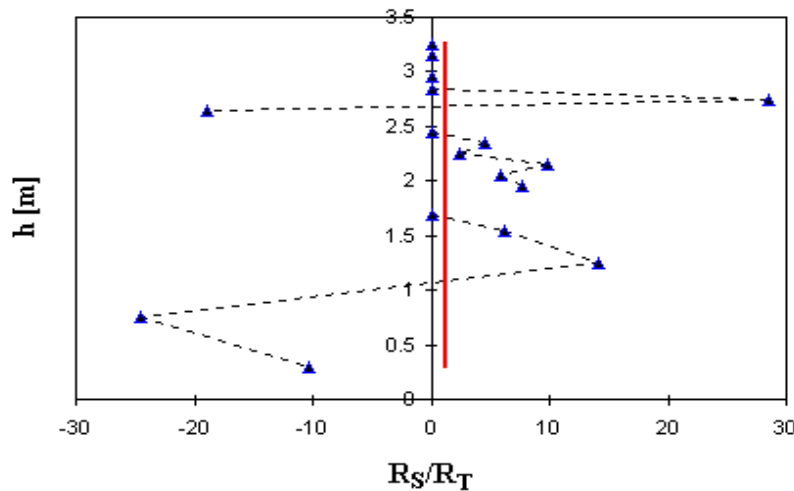


Figura 1.23: Análise de estabilidade para o Lago Solar de Pégões, obtida em 20/8/85

Finalmente, a Figura 1.23 mostra a análise efectuada em 20/8/85, traduzindo a existência de zonas convectivas internas, as quais praticamente destruíram o gradiente salino (ver a Figura 1.22).

Na realidade, o aquecimento após Julho de 1985 aliado à falta de estabilidade apontada pela Figura 1.20 conduziu ao crescimento da zona superficial, ao aparecimento de convecção na zona gradiente e ao arrefecimento de todo o Lago (confrontar com a Figura 1.21).

Do que foi exposto ao longo desta secção conclui-se que:

- Nm Lago Solar de Gradiente de Salinidade podem existir diferentes processos de transferência de calor e massa. Estas transferências têm diferentes consequências do ponto de vista do funcionamento do Lago;
- Para que o funcionamento de um Lago Solar seja estável não é suficiente garantir a existência de um perfil de densidades crescente com a profundidade. As instabilidades, provocadas pelo facto do coeficiente de difusão molecular ser muito inferior ao coeficiente de difusão da temperatura, implicam a existência de condições mais restritivas para a estabilidade do Lago;
- Os perfis de temperatura e salinidade observados no Lago de Pégões dão informação sobre a estabilidade do Lago permitindo prever a sua evolução futura.

1.3 O Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes

A absorção de radiação solar num Lago Solar conduz à formação de um gradiente térmico na zona intermédia. Esta situação é análoga à que ocorreria numa camada de fluido que estivesse aquecida por baixo. Daqui resulta que a zona gradiente de um Lago Solar pode, numa primeira aproximação, ser considerada como uma camada de fluido aquecida por baixo.

1.3.1 Resumo histórico

O Problema inicial de Rayleigh-Bénard

O Problema de Rayleigh-Bénard é um problema clássico de difusão térmica e consiste na análise da estabilidade de uma camada de fluido aquecida por baixo. Bénard (1900) analisou de uma forma experimental o comportamento de uma camada de fluido ao ser aquecida por baixo, tendo Lord Rayleigh formalizado a teoria da instabilidade convectiva.

Lord Rayleigh admitiu para a camada de fluido condições de fronteira de valor imposto para a temperatura e valor nulo para a velocidade e para a tensão de corte tendo mostrado analiticamente que o movimento convectivo se iniciava para um determinado valor crítico do grupo adimensional conhecido desde 1950 por número de Rayleigh, Rayleigh (1916). Este número traduz a relação entre a energia de sustentação criada pelo gradiente térmico e a energia das forças viscosas.

No problema de Rayleigh-Bénard, abaixo do valor crítico do número de Rayleigh, dado por $R_T = 27\pi^4/4$ a transferência de calor rege-se apenas por condução, enquanto que acima deste valor o processo dominante de transferência de calor é a convecção.

De notar, ainda, que o processo de convecção pode ser iniciado ou por pequenas plumas ou por "rolos" de maior amplitude consoante a configuração do reservatório.

Outros autores consideraram a hipótese de fronteiras rígidas, (admitindo que todas as componentes da velocidade são nulas nas fronteiras) tendo concluído que a partir de um dado valor crítico do número de Rayleigh se desenvolve movimento convectivo estacionário, Jeffreys (1926), Jeffreys (1928).

Em ambos os casos, o estudo da estabilidade foi feito sobrepondo pequenas perturbações ao estado estacionário do sistema, isto é ao estado que corresponde à situação de derivadas temporais nulas. A análise da evolução daquelas perturbações conduziu ao estabelecimento dos critérios de estabilidade.

O problema de Rayleigh-Bénard foi estudado por outros autores entre os quais se destacam Pellew and Southwell (1940) e Reid (1965). Chandrasekhar (1961) apresenta toda a teoria de estabilidade referente a este problema, indicando os critérios de estabilidade.

O Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes

Stern (1960) generalizou o problema de Rayleigh-Bénard considerando que, na camada de fluido, para além do gradiente desestabilizador de temperaturas, existia um gradiente estabilizador de salinidade, passando este problema a ser designado na literatura por "Problema de Rayleigh-Bénard, a duas componentes". Considerou que a camada de fluido duplamente difusiva estava limitada por duas superfícies horizontais paralelas assumindo a temperatura e a salinidade valores fixos nas fronteiras. Descreveu as equações às derivadas parciais que regem o processo de dupla difusão analisando a estabilidade dos gradientes de temperatura e salinidade perante o efeito de pequenas perturbações. Efectuou igualmente a análise de estabilidade na situação em que ambos os gradientes de temperatura e salinidade apresentavam o mesmo sinal. Concluiu que as equações que delimitam as zonas estáveis das instáveis, no caso do problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes, são análogas às equações que regem a estabilidade de uma camada de fluido com um só componente.

Turner (1965) efectuou igualmente análises de estabilidade, tendo sistematizado o

mecanismo que preside à alternância entre estabilidade e instabilidade numa camada de fluido duplamente difusiva. Assim, segundo Turner, os elementos de fluido do fundo da camada entram em movimento, seguindo-se uma homogeneização da temperatura e da concentração salina na camada de fluido, Turner (1974) e Turner (1968).

Após esta primeira fase de homogeneização, que ocorre para um determinado valor crítico do número de Rayleigh, observa-se um período de estabilidade; algum tempo depois, em consequência da subida de temperatura, desenvolvem-se correntes de convecção no interior da camada, dando origem a processos de transferência de calor e massa, com a destruição do gradiente salino.

A análise teórica desenvolvida por Turner foi validada com os resultados obtidos por Hoare (1966) e Munns et al. (1967), decorrentes das medições de taxas de transferência de calor e sal efectuadas, em 1966, em lagos da Antártida e no fundo do Mar Vermelho.

Além da introdução da designação de instabilidade com dupla difusão, também se atribui a Turner (1985) a introdução dos conceitos de estabilidade estática e estabilidade dinâmica.

Enquanto a estabilidade estática designa a situação da camada que é estável do ponto de vista gravítico, a estabilidade dinâmica traduz a situação em que a camada além de ser estável do ponto de vista gravítico também o é em relação a fenómenos derivados da dupla difusão.

Segundo este autor, nos fenómenos de dupla difusão podem existir instabilidades mesmo quando a camada é estável do ponto de vista gravítico, facto pelo qual a análise de estabilidade é inevitavelmente uma análise dinâmica.

Com o objectivo de efectuar uma análise dinâmica de estabilidade Veronis (1965), Veronis (1968) considerou a camada de fluido infinita na horizontal e concluiu que o sistema se tornava instável para um determinado valor do gradiente de temperatura, desenvolvendo-se esta instabilidade em consequência da diferença de difusibilidades da temperatura e do sal.

Após efectuar a linearização do sistema de equações diferenciais que traduz o problema de dupla difusão, Veronis analisou a respectiva solução estacionária, à qual sobrepôs perturbações, tendo observado que a amplitude destas evolui através de movimento oscilatório, Veronis (1965).

Este autor sistematizou o Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes, delimitando as zonas de instabilidade oscilatória e os estados estacionários em termos de números de Rayleigh (térmico e salino) e de Prandtl.

A evolução do fenómeno de convecção termohalina (designação introduzida por Turner para descrever o processo convectivo associado à existência de gradientes térmicos e salinos) com um gradiente de concentração estabilizador, foi também analisada experimentalmente por Sani (1964b), Sani (1965) tendo este verificado que o movimento convectivo se iniciava na forma de dois "rolos" bidimensionais.

Schechter et al. (1972) e Platten and Legros (1983) observaram a possibilidade de ocorrência de instabilidades em sistemas duplamente difusivos quando a camada de fluido é estáticamente estável, reforçando a ideia de Turner. Estes autores delimitaram as zonas de estabilidade, com base na Teoria Linear de estabilidade.

Huppert (1976) e Huppert and Moore (1976), na década de 70, observaram que a resolução numérica das equações às derivadas parciais representativas da conservação da quantidade de movimento, da energia e da conservação do sal conduzia a dois tipos de solução; uma solução estacionária e uma solução oscilatória. Ambas as soluções foram descritas em termos do número de Rayleigh térmico.

Proctor (1981) foi um pouco mais longe na análise das soluções do sistema de dupla difusão, tendo descrito a solução estacionária na vizinhança do valor mínimo de R_T utilizando uma aproximação de camada limite válida quando o coeficiente de difusão térmica é muito pequeno. A ideia principal era que para estes valores só apareciam gradientes de salinidade próximo das fronteiras das células de convecção, sendo o campo da salinidade uniforme no interior das mesmas.

Nos anos que se seguiram dedicou-se particular atenção à morfologia das soluções do sistema de equações diferenciais descritivas do problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes (Marzec and Spiegel (1980) e May (1976)). A visualização das soluções num espaço de fase apropriado facilita a compreensão da evolução do sistema e do próprio processo de dupla difusão.

Assim, Huppert e Moore, verificaram que a solução periódica, encontrada na resolução do sistema descritivo do problema de dupla difusão, exibia um comportamento dependente do tempo que incluía uma sequência com duplicação de período, apontando para um comportamento caótico.

Costa et al. (1981) efectuaram o estudo da estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes tendo utilizado, apenas, os primeiros cinco termos do desenvolvimento em série, proposto como solução aproximada do sistema de equações diferenciais descritivas do problema. Esta solução de ordem inferior (nomeadamente em relação à solução proposta por Huppert e Moore) permitiu efectuar a análise qualitativa em termos dos parâmetros principais do sistema, a partir da respectiva visualização num espaço de fase apropriado. Segundo estes autores se se aumentar a temperatura a amplitude das oscilações aumenta até se desencadear movimento convectivo. Este comportamento só ocorre no caso em que o coeficiente de difusão molecular é muito inferior ao coeficiente de difusão de temperatura, situação característica da convecção com dupla difusão. Da Costa caracterizou o comportamento das soluções do problema e concluiu que a existência de duplicação de período seguida do aparecimento de um atractor estranho é característica dos problemas de dupla difusão. Observe-se que o tipo de análise feita foi análoga à previamente desenvolvida em relação às soluções do sistema de Lorenz, no domínio da meteorologia.

Na última década o problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes tem sido abordado empregando métodos variacionais, para a delimitação das zonas de estabilidade. Têm sido, igualmente, previstos domínios de resolução deste problema, com diferentes geometrias, Mukutmoni and Yang (1993a), Mukutmoni and Yang (1993b).

Da revisão da literatura abordando o problema de Rayleigh-Bénard a duas compo-

mentos, pode concluir-se que:

- A análise da estabilidade de uma camada de fluido aquecida por baixo começou por ser feita a partir da resolução do sistema de equações diferenciais descritivo do fenómeno, admitindo, como solução, um desenvolvimento em série de Fourier Veronis (1965), Schechter et al. (1981) e Costa et al. (1981);
- Posteriormente, autores como Proctor (1981) e Nield et al. (1993) utilizaram métodos variacionais para analisar a evolução das soluções aproximadas do mesmo sistema de equações em termos de estabilidade;
- Em ambos os casos, a análise da estabilidade é feita sobrepondo pequenas perturbações à solução estacionária do problema;
- Da análise feita constatou-se que as soluções obtidas podem ser de dois tipos: estacionárias ou oscilatórias;
- A análise de estabilidade tomou um aspecto qualitativo com o estudo da morfologia das soluções obtidas, o qual permite a visualização da evolução das soluções como função de determinados parâmetros, considerando todos os termos da solução obtida, incluindo os não lineares. Observe-se que tal não se verifica na análise de estabilidade clássica, a qual despreza os termos não lineares. Motivo pelo qual é interessante constatar até que ponto a análise qualitativa (não linear) vai de encontro às situações previstas pela análise linear.
- Embora os autores citados tenham considerado que a camada de fluido em estudo obedece a uma determinada configuração, assumindo que é infinita na horizontal, outras geometrias foram analisadas laboratorialmente. As conclusões obtidas apenas diferem nos valores que indicam o início de determinado tipo de movimento.

1.3.2 Dupla difusão: domínios de aplicação

O desenvolvimento do estudo de fenómenos de dupla difusão começou com o esforço conjunto de teóricos, experimentalistas e investigadores da área da Oceanografia, nomeadamente Jevons (1857), Mendenhall and Mason (1923) e Stommel et al. (1956).

São exemplo de processos de dupla difusão nesta área quer o aparecimento de microestruturas nos oceanos e a sobreposição de camadas oceânicas distintas, como o caso da ligação entre o Mar Mediterrâneo e o oceano Atlântico, quer a existência de zonas de instabilidades duplamente difusivas designadas por "dedos de sal".

A observação de microestruturas no fundo dos oceanos conduziu ao desenvolvimento teórico dos fenómenos de dupla difusão, na tentativa de obter explicação para os resultados obtidos experimentalmente.

A formação de "dedos de sal" parece estar ligada à existência de importantes bancos piscatórios e daí a importância da sua análise.

Gregg and Cox (1972), na sequência dos resultados obtidos com a observação e medição de perfis de temperatura, salinidade e densidade nos oceanos, apontaram para a possibilidade de que movimentos de transferência, até então considerados desprezáveis, pudessem conduzir a estratificações, ocorrendo os movimentos turbulentos em camadas horizontais delgadas.

Na atmosfera ocorrem processos de dupla difusão, como resultado da existência de camadas estratificadas (em temperatura e, por exemplo, teor de vapor de água no ar), apesar dos coeficientes de difusão da temperatura e do vapor de água terem valores semelhantes.

Os processos de dupla difusão podem ser importantes na área do Armazenamento de Energia, no contexto de sistemas de armazenamento de Gas Natural Liquefeito (LNG). Observe-se que num reservatório cheio de LNG relativamente quente podem-se formar duas camadas separadas por uma interface difusiva, Sarsten (1972).

Diferentes efeitos de convecção a mais do que uma componente, Spiegel (1971), Spiegel (1972) são susceptíveis de serem observados na área da Astrofísica. Refira-se que Spiegel Spiegel (1971), analisou as propriedades das estrelas estabelecendo uma analogia com o problema de dupla difusão de Rayleigh-Bénard a duas componentes. Goldreich and Schubert (1967) ao analisarem as propriedades das estrelas, apontaram a existência de uma instabilidade análoga à instabilidade conhecida como "dedos de sal". Estudos relacionados com a convecção magnética têm sido objecto de artigos de revisão entre os quais se destacam os da autoria de Busse (1983) e Loper and Roberts (1983).

A Metalurgia também evidencia fenómenos de dupla difusão nomeadamente no que respeita o crescimento de cristais a partir de um meio em fusão. A necessidade no campo da indústria electrónica de cristais quimicamente mais homogéneos e de grandes dimensões, contribuiu para o desenvolvimento do estudo respeitante ao crescimento de cristais.

No que toca a Geologia, têm sido efectuadas diferentes tipos de experiências consistindo na modelação de câmaras com magma de composição variável, a diferentes temperaturas, com o objectivo de analisar determinados processos geológicos. De acordo com o processo que se pretende analisar, assim se consideram camadas inferiores de magma mais ou menos densas e camadas homogéneas ou estratificadas.

Na área da Geofísica existem exemplos a uma escala macroscópica de processos influenciados por convecção a mais do que uma componente, que ocorrem na Terra, como seja o problema de diferenciação entre a crosta e o manto terrestres Spohn and Schubert (1982), Richter (1979), Stevenson and Turner (1979), Mckenzie and Richter (1981) e Ringwood (1982).

No domínio da Química tem-se observado o aparecimento de instabilidades nas interfaces entre camadas de polímeros.

Capítulo 2

Formulação do Problema

2.1 Introdução

O estabelecimento do modelo descritivo do fenómeno de dupla difusão que ocorre na zona gradiente de um Lago Solar, que consiste num conjunto de equações às derivadas parciais e respectivas condições de fronteira, relaciona a Física e a Matemática.

É pois natural que a introdução de conceitos físicos se faça acompanhar por uma abordagem matemática. Desta forma, inicia-se este Capítulo com algumas definições sobre Equações às Derivadas Parciais seguindo-se a apresentação dos conceitos de Mecânica de Fluidos considerados mais relevantes.

Numa segunda parte estabelecem-se as equações de conservação que traduzem o fenómeno de dupla difusão que se desenvolve na zona gradiente do Lago Solar.

2.1.1 Equações às Derivadas Parciais

A interpretação matemática dos problemas físicos conduz ao estudo de equações diferenciais, em particular ao estudo das equações diferenciais às derivadas parciais.

Refira-se, como exemplo, que em 1746 D'Alembert fez uma primeira tentativa para resolver o problema da corda vibrante, estando subjacente ao método de resolução a simplificação da equação, através de uma mudança de variável, resultando numa equação de fácil resolução.

Euler, em 1748-49, nos seus estudos "Sobre a vibração das cordas" reflectiu no essencial o método de D'Alembert, para a resolução do problema. Acrescentou, contudo, duas observações, que se revelariam fundamentais no posterior desenvolvimento da Análise.

A primeira consistiu em admitir curvas iniciais descontínuas, facto que nunca antes tinha sido admitido, mas que na realidade foi o ponto de partida para a generalização do conceito de função, tal como hoje o entendemos: correspondência genérica entre variáveis independentes e dependentes.

Uma segunda observação consistiu em admitir que, sendo a curva inicial dada por um somatório de senos, a correspondente solução da corda vibrante seria dada na forma de um somatório envolvendo um produto de senos por cosenos. Não indicava, contudo, se o somatório era finito ou infinito. Esta formalização poderia tê-lo conduzido à noção de série trigonométrica.

Seria Daniel Bernoulli que, num artigo em 1753, estabeleceria que qualquer curva inicial podia ser representada por uma série trigonométrica, uma vez que "possuimos uma

infinidade de hipóteses de escolher os A_n (coeficientes da série) de forma a que a série represente qualquer curva ". Bernoulli concluiu que os coeficientes da série trigonométrica encontrada, na resolução do problema da corda vibrante, seriam determinados a partir da posição inicial. Esta ideia foi contudo rejeitada por Euler e D'Alembert, os quais não admitiam a hipótese de qualquer função arbitrária poder ser representada por meio de uma série trigonométrica.

Em 1759 Lagrange obteve resultados próximos dos de Bernoulli e em 1807 Fourier apresentou uma comunicação à Academia de Ciências de Paris "Sobre a Teoria de Condução do Calor" onde enunciava o teorema da representação de uma função arbitrária por uma série trigonométrica, explicitando a forma de obter os coeficientes daquela série a partir da função dada.

Em 1829 Dirichlet apresentou uma demonstração do Teorema de Fourier, com certas hipóteses restritivas sobre as funções a que se aplica. A partir desta data, as séries trigonométricas passaram a ter um papel preponderante na procura de condições necessárias e suficientes para a representação de uma função num tal desenvolvimento.

Estes estudos constituíram a base da generalização de integral introduzido por Riemann em 1853 e por Lebesgue em 1901.

A Mecânica dos Fluidos e o estudo de Equações às Derivadas Parciais surgiram pois interligadas no início do século XVIII com Jakob (1655-1748), Johann (1667-1748) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

Enquanto as equações às derivadas parciais foram desenvolvidas, por autores como Navier (1785-1836), Stokes (1819-1903), Cauchy (1789-1857) e Hugoniot (1851-1887), a teoria do potencial surge com Gauss (1831), Poisson (1781-1840), Green (1793-1841) e Kelvin (1824-1907), na tentativa de descrever os campos gravítico, eléctrico e os fluidos perfeitos.

Refira-se, a terminar esta breve introdução histórica, que, segundo a noção de "problema bem posto" de Hadamard, as três condições fundamentais que um modelo matemático descritivo de um determinado problema físico deverá sempre satisfazer são:

1. Existência de solução;
2. Unicidade de solução. Trata-se de uma necessidade que resulta do determinismo em que assenta a maioria das explicações físicas; as mesmas causas produzem sempre os mesmos efeitos;
3. Dependência contínua da solução relativamente às condições iniciais e/ou de fronteira, e ainda relativamente aos demais parâmetros do problema. Na prática ocorrem erros nos processos de medição. Para que o modelo matemático esteja precavido relativamente àqueles erros é necessário que a "pequenas" variações nos dados correspondam "pequenas" variações na solução.

Generalidades sobre Equações às Derivadas Parciais

Definição 2.1.1 *Define-se equação às derivadas parciais (EDP) como sendo uma relação L que faz intervir as variáveis independentes $(x, y, ..)$, uma função destas variáveis, desconhecida $u(x, y, ...)$, e as derivadas parciais da função u , $(u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ...)$;*

$$L(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

com

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots \quad (2.2)$$

Definição 2.1.2 *Por ordem de uma EDP entende-se a ordem da derivada parcial de maior ordem aparecendo na equação.*

Considerando as variáveis independentes (x, y, \dots) num certo domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ procuram-se funções $u(x, y, \dots)$ satisfazendo (2.1) identicamente em Ω : estas funções são designadas soluções da equação (2.1).

Refira-se que nas equações diferenciais ordinárias (em que a função incógnita depende somente de uma variável) a solução geral de uma equação de ordem m é uma família de funções, dependentes de m constantes arbitrárias, mas nas equações com derivadas parciais a solução geral depende de funções arbitrárias.

Associadas às equações com derivadas parciais aparecem regra geral condições adicionais: condições iniciais e/ou de fronteira, que as soluções devem também satisfazer. O papel destas condições é bastante importante, uma vez que vai ser o de determinar (ou restringir) as funções arbitrárias que definem a solução geral.

Observe-se que a determinação de uma dada solução particular de uma EDP, que satisfaça as condições suplementares, a partir da solução geral é normalmente difícil, por vezes mais difícil mesmo do que a determinação da solução geral. Por este motivo, é preferível determinar directamente a solução particular sem recorrer à solução geral.

Condições iniciais e condições de fronteira

Chamam-se condições iniciais ou condições de Cauchy às condições suplementares que são impostas num dado instante inicial.

Designam-se por condições de fronteira as condições que se impõem sobre o valor da função ou das suas derivadas, na fronteira Γ de um domínio Ω , ou numa parte da fronteira.

Considerando uma solução u definida num domínio Ω , as condições de fronteira classificam-se em:

1. Condições de Dirichlet: ocorrem quando é fixado o valor da solução u do problema na fronteira Γ do domínio Ω ;
2. Condições de Neumann: ocorrem quando a derivada da solução u é imposta na fronteira do domínio;
3. Condições mistas: resultam quando se têm condições dos dois tipos referidos.

Os métodos clássicos da análise permitiram desenvolver de forma satisfatória a teoria das equações com derivadas parciais de primeira ordem.

Porém, para as equações de ordem superior foram os métodos da análise funcional que vieram permitir a formulação correcta da sua teoria (e só no caso das equações lineares).

Classificação de EDP's

A modelação dos problemas da física assenta, em geral, em equações diferenciais de segunda ordem, facto pelo qual é suficiente considerar a classificação das EDP para o caso da equação quasilinear de segunda ordem dada por:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = l \quad (2.3)$$

com a, b, c e l funções de x, y, u, u_x e u_y .

O facto de se considerar uma equação de 2ª ordem não se apresenta restritivo, sendo esta hipótese facilmente generalizada.

O problema que se põe consiste pois em determinar as condições suficientes para que u, u_x e u_y , previamente dados, possam determinar unívocamente u_{xx}, u_{yy} e u_{xy} por forma a que a equação (2.3) seja satisfeita.

Caso estas derivadas existam, tem-se:

$$du_x = u_{xx}dx + u_{xy}dy \quad (2.4)$$

$$du_y = u_{xy}dx + u_{yy}dy \quad (2.5)$$

A partir deste sistema e da equação (2.3) vem:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ du_x \\ du_y \end{bmatrix}$$

A solução para u_{xx}, u_{xy} e u_{yy} existe e é única sse o determinante da matriz deste sistema for diferente de zero, isto é caso

$$a(dy)^2 - b(dy)(dx) + c(dx)^2 \neq 0 \quad (2.6)$$

Caso contrário obtêm-se a equação quadrática em dy/dx dada por:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad (2.7)$$

cujas soluções podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas de acordo com o sinal do respectivo binómio discriminante $b^2 - 4ac$. Este é também o critério que preside à classificação das EDP's. Assim, a equação (2.3) é do tipo:

1. hiperbólico se $b^2 - 4ac > 0$;
2. parabólico se $b^2 - 4ac = 0$;
3. elíptico se $b^2 - 4ac < 0$.

Como a, b, c são função de x, y, u, u_x e u_y o tipo da equação pode variar de ponto para ponto.

Generalizando esta classificação a uma equação de segunda ordem a n variáveis, tem-se:

Definição 2.1.3 *Se u for uma função de n variáveis independentes, as equações às derivadas parciais lineares de segunda ordem escrevem-se:*

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)u + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.8)$$

Então:

1. Se todos os a_i forem não nulos e do mesmo sinal, a equação às derivadas parciais diz-se do tipo elíptico.
2. Se todos os a_i forem não nulos e do mesmo sinal, com apenas uma excepção, a equação diz-se do tipo hiperbólico.
3. Se apenas um dos a_i (designado por a_{i_0}) for nulo e todos os outros forem do mesmo sinal, com b_{i_0} não nulo, a equação diz-se do tipo parabólico.

Generalizando a classificação das EDP's aos operadores diferenciais de segunda ordem do tipo:

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.9)$$

com α_{ij} uma matriz simétrica, isto é $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, tem-se que o operador (2.9) é classificado no ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ de acordo com a classificação da matriz simétrica (α_{ij}) . Assim o operador é

1. elíptico se a matriz (α_{ij}) for positiva definida no ponto x ;
2. parabólico se a matriz (α_{ij}) tiver determinante nulo no ponto x ;
3. hiperbólico se a matriz (α_{ij}) for definida negativa no ponto x .

De acordo com esta definição pode dizer-se que, os problemas bem postos surgem:

1. Para as equações elípticas (por exemplo, a equação do potencial) com a adição de condições de fronteira;
2. Para as equações hiperbólicas (por exemplo a equação da corda vibrante) com a adição de condições iniciais e de fronteira;
3. Para as equações parabólicas (por exemplo a equação da difusão do calor) com a adição de condições iniciais e de fronteira.

Classificação dos Problemas da Física

A maior parte dos problemas da Física e da Engenharia podem ser classificados em problemas de equilíbrio, problemas de valores próprios ou problemas de propagação.

1. Os problemas de equilíbrio são problemas de estado estacionário nos quais a configuração de equilíbrio ϕ num domínio Ω é determinada resolvendo a equação diferencial:

$$L[\phi] = f \quad (2.10)$$

sujeita a um conjunto de condições impostas na fronteira Γ :

$$B[\phi] = g \quad (2.11)$$

Do ponto de vista matemático estes problemas designam-se por problemas de valor de fronteira. Apesar da diversidade deste tipo de problemas, as equações descritivas são do tipo elíptico.

Nos problemas de equilíbrio os valores das variáveis ou das suas derivadas normais são dados nas fronteiras, dependendo a solução num dado ponto interior do domínio do valor de todos os pontos da fronteira do domínio.

São exemplo de problemas de equilíbrio, os escoamentos estacionários ou a distribuição estacionária da temperatura. Um dos exemplos mais famosos de problemas de equilíbrio é a equação de Laplace. Esta equação, que traduz o estado estacionário da temperatura num meio isotrópico, é dada, no caso bidimensional, por:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.12)$$

A introdução das variáveis $\theta = x + iy$, $\psi = x - iy$ e $u(x, y) = v(\theta, \psi)$ transforma a equação (2.12) em $v_{\theta, \psi}^2 = 0$, cuja solução, obtida por integração, é $v = f(\theta) + g(\psi)$, com f e g funções diferenciáveis quaisquer. A solução geral da equação (2.12) vem então dada por:

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy) \quad (2.13)$$

2. Os problemas de valores próprios são uma extensão dos problemas de equilíbrio e neles os valores críticos de certos parâmetros devem ser determinados.

Matematicamente o problema consiste em determinar uma ou mais constantes λ e as correspondentes funções ϕ tais que a equação diferencial:

$$L[\phi] = \lambda M[\phi] \quad (2.14)$$

é satisfeita num domínio Ω , estando sujeita às condições de fronteira:

$$B[\phi] = E[\phi] \quad (2.15)$$

definidas em Γ . Os operadores M e L são do tipo elíptico.

São exemplo deste tipo de problema a estabilidade de estruturas ou a ressonância em circuitos eléctricos e acústicos.

3. Os problemas de propagação estudam a evolução no tempo de um dado fenómeno a partir de um estado inicial conhecido. Consistem em resolver a equação diferencial:

$$L[\phi] = f \quad (2.16)$$

sujeita à condição inicial:

$$I[\phi] = h \quad (2.17)$$

e às condições de fronteira, definidas na fronteira Γ do domínio Ω , por:

$$B[\phi] = g \quad (2.18)$$

Do ponto de vista matemático, os problemas de propagação designam-se por problemas de valor inicial, e são descritos por equações do tipo parabólico ou hiperbólico.

(a) As equações parabólicas que se encontram na Física são em geral da forma:

$$u_t = L(u) \quad (2.19)$$

com L operador diferencial de segunda ordem. Tal é o caso da equação:

$$u_t = \nabla \cdot [f \nabla u] \quad (2.20)$$

onde f pode ser ou constante, ou função espacial, ou função de u ou de ∇u . Esta equação serve de modelo a numerosos exemplos da Física, os quais são descritos por Crank (1956), Carslaw and Jaeger (1960), Fox (1962), Ames (1965) e Ames (1965). Um exemplo simples de uma equação deste tipo é dado pela equação da difusão a uma dimensão:

$$u_t = u_{xx} \quad (2.21)$$

A teoria geral das equações parabólicas como a existência, unicidade e diferenciabilidade das soluções encontra-se, por exemplo, em Friedman (1964) ou Bernstein (1950).

(b) As equações hiperbólicas decorrem de fenómenos de propagação, sendo a equação das ondas um exemplo simples deste tipo de problema. Esta equação apresenta a forma:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (2.22)$$

podendo a sua solução geral ser obtida, como mostrou D'Alembert, se as segundas derivadas intervenientes forem contínuas. A introdução de novas variáveis $\theta = x - t$, $\psi = x + t$ e $u(x, t) = v(\theta, \psi)$ transforma a equação (2.22) em $v_{\theta\psi} = 0$ cuja solução é $v = f(\theta) + g(\psi)$ com f, g funções diferenciáveis quaisquer. Assim

$$u(x, t) = f(x - t) + g(x + t) \quad (2.23)$$

é solução da equação (2.22), caso f e g possuam segundas derivadas contínuas.

A distinção entre problemas de equilíbrio e problemas de propagação pode ser observada em pormenor em Richter (1979). Refira-se a finalizar que, enquanto que a solução de um problema de valor de fronteira depende dos valores em toda a fronteira (problemas de equilíbrio), no caso de um problema de propagação a solução num dado ponto interior do domínio pode depender apenas das condições de uma parte da fronteira.

2.1.2 Conceitos básicos em Mecânica dos Fluidos

Classificação de escoamentos

A descrição de um escoamento pode ser feita segundo a óptica de Lagrange ou segundo a óptica de Euler.

A primeira estuda a variação das propriedades características de um elemento de fluido, ao longo da sua trajectória à medida que o tempo varia, enquanto que a segunda descreve a variação dos parâmetros característicos do escoamento num ponto fixo do espaço ocupado sucessivamente por diferentes elementos de fluido, dependendo as propriedades de um elemento de fluido da respectiva posição espacial e do tempo.

Os escoamentos classificam-se ainda em:

1. Escoamentos variáveis: a velocidade num ponto é função do ponto e do instante considerado, isto é em cada ponto a velocidade das partículas que por ele passam varia de instante para instante;
2. Escoamentos permanentes ou estacionários: a velocidade é função das coordenadas mas independente do instante considerado, condição traduzida por $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Como caso particular deste tipo de escoamento define-se escoamento uniforme como um movimento em que a velocidade é constante no espaço.

O regime pode ainda ser:

- (a) laminar: caracterizado por movimento ordenado das partículas de fluido que seguem trajectórias regulares;
- (b) turbulento: a velocidade de uma dada partícula varia em grandeza e direcção, sem regularidade, de uma forma aleatória.

Sendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ a velocidade do escoamento, o seu valor médio num intervalo $[t, t+T]$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v} dt \quad (2.24)$$

Um escoamento turbulento diz-se estacionário quando $\bar{\mathbf{v}}$ for independente do tempo; neste caso a velocidade num dado ponto e num dado instante pode ser considerada como a soma vectorial de uma velocidade média no tempo ou velocidade de transporte e de uma velocidade de flutuação turbulenta, aleatória. A Figura 2.1 representa a variação da velocidade com o tempo num dado ponto de um escoamento turbulento estacionário (a) e num dado ponto de um escoamento turbulento variável (b).

Derivada Total

Considere-se um fluido num domínio Ω dum espaço tridimensional e seja $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, a velocidade do elemento de fluido que passa no ponto \mathbf{x} de coordenadas $\mathbf{x} = (x, y, z)$ num dado instante t . Observe-se que o campo das velocidades de um escoamento é uma função contínua no espaço e no tempo. Para cada t é fornecido um campo de vectores dado por \mathbf{v} .

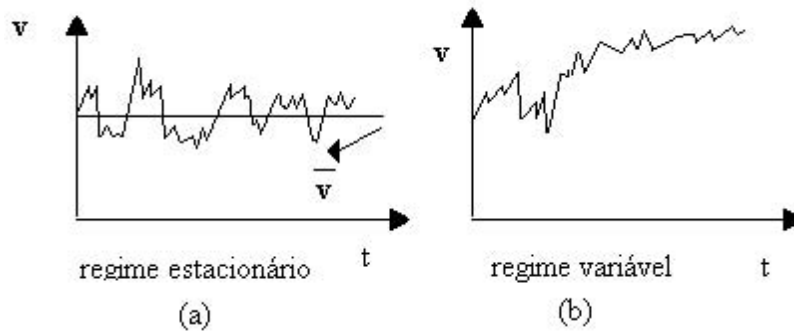


Figura 2.1: Variação da velocidade com o tempo

A solução da equação diferencial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.25)$$

define a trajetória $\mathbf{x}(t)$ de um dado elemento de fluido.

Seja pois $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a trajetória do elemento de fluido cuja velocidade venha dada por:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)) \quad (2.26)$$

Então a aceleração, $d(\mathbf{v}(x, y, z, t))/dt$ vem escrita na forma:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}_t + u\mathbf{v}_x + v\mathbf{v}_y + w\mathbf{v}_z \quad (2.27)$$

com

$$\mathbf{v}_x = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \dots \quad \mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.28)$$

e em notação vectorial tem-se:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.29)$$

A soma das duas derivadas que figuram na última equação pode ser representada abreviadamente pelo operador derivada total, definido por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.30)$$

A primeira parcela deste operador traduz uma variação com o tempo e a segunda parcela traduz uma variação espacial. Se P for uma dada propriedade do elemento de fluido, a variação do seu valor tem duas componentes:

1. variação temporal da propriedade, dada por $\partial P / \partial t$;
2. variação espacial da propriedade, dada por $\mathbf{v} \cdot \nabla P$ a qual ocorre quando o elemento de fluido se desloca. A este tipo de variação associada ao movimento chama-se variação convectiva.

2.2 Equações Fundamentais

2.2.1 Leis de Conservação

As equações descritivas dos escoamentos de fluidos assentam em leis de conservação de uma propriedade num volume de controlo.

Considere-se uma dada propriedade P com uma intensidade I por unidade de massa e seja ρ a massa específica do fluido.

A variação com o tempo da quantidade da propriedade contida num volume fictício, fixo no espaço (volume de controlo v_c) é devida quer ao fluxo resultante da propriedade através da superfície fechada que encerra o volume (superfície de controlo s_c) quer à acção das fontes da propriedade cuja intensidade por unidade de massa é dada por f_I , de acordo com a Figura 2.3. Esta lei de conservação exprime-se, analiticamente, na forma integral por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \rho I dV = - \oint_{s_c} \rho I \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{v_c} \rho f_I dV \quad (2.31)$$

O sinal menos que afecta o integral de superfície resulta de se considerar \vec{n} como a normal exterior.

O volume de controlo é fixo no espaço podendo os operadores derivada temporal e integração no volume, do primeiro membro, permutar. O Teorema da Divergência de Gauss permite que o integral de superfície do segundo membro, se transforme em integral de volume. Assim, a equação (2.31), passa a assumir a forma:

$$\int_{v_c} \frac{\partial(\rho I)}{\partial t} dV = - \int_{v_c} \nabla \cdot (\rho I \mathbf{v}) dV + \int_{v_c} \rho f_I dV \quad (2.32)$$

Para que esta relação integral de conservação da propriedade ρI seja válida, independentemente do volume de controlo escolhido, deverá ter-se:

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho I \mathbf{v}) = \rho f_I \quad (2.33)$$

Desenvolvendo e reagrupando os termos obtém-se a forma diferencial da lei de conservação:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] I + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] I = \rho f_I \quad (2.34)$$

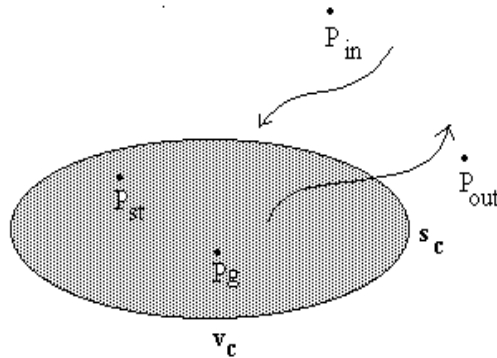


Figura 2.2: Balanço da propriedade P

Equação de Conservação da Massa

A equação de conservação da massa obtém-se directamente da forma diferencial da lei de conservação (2.34), fazendo $I = 1$, de acordo com a Figura 2.3. Supondo que não existem

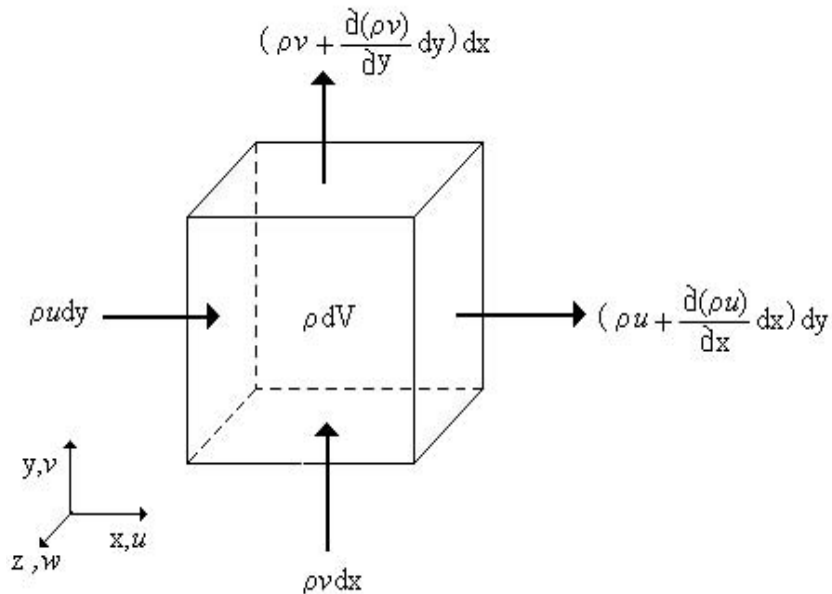


Figura 2.3: Balanço de massa

fontes de massa, vem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.35)$$

Desenvolvendo o gradiente e atendendo à equação de definição do operador derivada total, obtém-se a forma alternativa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.36)$$

Considerando $\mathbf{v} = (u, v, w)$, a representação cartesiana de (2.36) é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

A equação de conservação da quantidade de movimento relaciona a taxa de variação da quantidade de movimento de um elemento de fluido com a resultante das forças aplicadas sobre esse elemento. Esta equação obtém-se da formulação integral da lei de conservação dada por (2.31). Fazendo pois $I = \mathbf{v}$ a equação integral de conservação vem dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \rho \mathbf{v} dV = - \oint_{s_c} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{v_c} \rho \mathbf{f}_v dV \quad (2.38)$$

onde \mathbf{f}_v representa a intensidade da fonte da quantidade de movimento.

Esta equação traduz uma relação entre forças, exprimindo que a força total aplicada a um volume de controlo é igual à adição das forças com origem no volume de controlo com o balanço das forças superficiais. Da observação da equação (2.38) é clara a existência de dois tipos de forças que actuam sobre um dado elemento de fluido. São elas as forças mássicas, proporcionais ao volume do elemento e as forças de superfície, proporcionais à área do elemento. A equação (2.38) pode assim ser escrita na forma:

$$\dot{m}\mathbf{v}_{st} = \dot{m}\mathbf{v}_{in} - \dot{m}\mathbf{v}_{out} + \dot{m}\mathbf{v}_g \quad (2.39)$$

Para as forças mássicas contribuem os campos gravítico, centrífugo, magnético e/ou eléctrico e para as forças de superfície, que resultam da interacção do elemento de fluido com o meio envolvente, contribuem a pressão estática e a tensão viscosa.

A resultante das forças de superfície, $\dot{m}\mathbf{v}_{in} - \dot{m}\mathbf{v}_{out}$ (esforços normais e tangenciais) é representada pelo tensor das tensões, σ . Seja σ_{ij} uma componente genérica deste tensor, representativa da componente segundo a direcção i da força por unidade de área exercida numa face plana do elemento de fluido orientada normalmente à direcção j . A Figura 2.4 representa algumas das forças que actuam segundo a direcção 1 num elemento de fluido

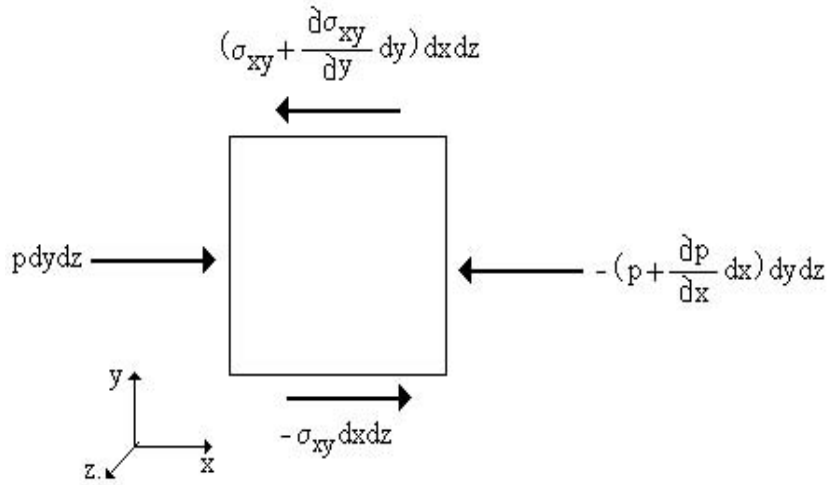


Figura 2.4: Efeito do tensor de tensões σ num elemento de fluido

paralelepédico. De acordo com a Figura 2.4 conclui-se que a componente i da força de superfície resultante por unidade de volume deverá ser dada por $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$.

É corrente exprimir o tensor das tensões da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.40)$$

em que p é a pressão, τ o tensor desviador das tensões e δ_{ij} o delta de Kronecker. Deste modo

$$p = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \quad (2.41)$$

representando, portanto, a tensão normal média segundo as três direcções espaciais.

Designando por f_i a componente segundo i da força mássica por unidade de massa ($\dot{m}\mathbf{v}_g$) e tendo em conta a expressão para a resultante das forças de superfície, a equação

da conservação da quantidade de movimento, na forma diferencial, vem traduzida por:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.42)$$

Equação de conservação da Energia

A taxa de variação da energia num dado volume de controlo, é igual à soma da energia gerada internamente com o balanço das permutas energéticas através da superfície de controlo. Designando a energia por e tem-se, fazendo $I = e$ na equação (2.31):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \rho e dV = - \oint_{s_c} \rho e \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{v_c} \rho f_e dV \quad (2.43)$$

ou de uma forma equivalente:

$$\dot{E}_{st} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g \quad (2.44)$$

onde \dot{E}_{st} designa a taxa de variação de energia armazenada no volume de controlo, \dot{E}_{in} e \dot{E}_{out} designam, respectivamente, a taxa de entrada e saída de energia através da superfície de controlo e \dot{E}_g a taxa de geração de energia.

Os termos \dot{E}_{in} e \dot{E}_{out} traduzem efeitos de superfície estando associados aos processos de transferências de calor por condução, por convecção e por radiação e aos efeitos das forças normais e tangenciais.

Se q''_x , q''_y e q''_z forem os fluxos de calor perpendiculares a cada superfície do volume, e

$$q''_{x+dx} dy dz = q''_x dy dz + \frac{\partial q''_x}{\partial x} dx \quad (2.45)$$

$$q''_{y+dy} dx dz = q''_y dx dz + \frac{\partial q''_y}{\partial y} dy \quad (2.46)$$

$$q''_{z+dz} dx dy = q''_z dx dy + \frac{\partial q''_z}{\partial z} dz \quad (2.47)$$

forem as taxas de transferência de calor nas superfícies opostas, o balanço à superfície conduz a $-\nabla \cdot \mathbf{q}''$.

Por outro lado, o trabalho transferido do volume de controlo para o meio envolvente através da superfície de controlo associado aos efeitos das forças normais e tangenciais é dado segundo a direcção x por:

$$\dot{W}_{net,x} = \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_{xx} - p)u] dV + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}u) dV \quad (2.48)$$

Quanto ao termo de geração interna \dot{E}_g , pode ser expresso por:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dV \quad (2.49)$$

onde \dot{q} é a taxa à qual a energia é gerada por unidade de volume. A geração pode ser devida a processos nucleares ou a processos químicos ou eléctricos, sendo positiva (fonte) se a energia térmica estiver a ser introduzida no volume de controlo e negativo (sumidor) se a energia estiver a ser extraída do volume de controlo.

Com base nas considerações feitas a equação de conservação de energia na forma diferencial vem dada por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot q'' - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu \Phi + \dot{q} \quad (2.50)$$

O primeiro membro da equação reflecte a variação de energia no tempo e no espaço, enquanto que, no segundo membro a primeira parcela representa a transferência de calor, através da superfície de controlo, a segunda representa o termo de pressão, a terceira a dissipação por viscosidade e a quarta a geração interna de calor.

Equação de conservação das espécies

A equação da conservação das espécies pode ser obtida através da equação (2.31) fazendo $I = 1$ e $\rho = \rho_A$ onde ρ_A designa a densidade do constituinte A , vindo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \rho_A dV = - \int_{v_c} \nabla \cdot (\rho_A v_A) dV + \int_{v_c} \rho_A f dV \quad (2.51)$$

De acordo com esta equação tem-se que a taxa de variação do constituinte A num volume de controlo é igual à soma da quantidade de constituinte A gerada internamente com o balanço das permutas de constituinte A através da superfície de controlo. A equação (2.51) escreve-se de uma forma equivalente como:

$$\dot{M}_{A,st} = \dot{M}_{A,in} - \dot{M}_{A,out} + \dot{M}_{A,g} \quad (2.52)$$

De uma forma análoga ao processo de transferência de calor, a taxa de transporte do constituinte em superfícies opostas (englobada nos termos $\dot{M}_{A,in} - \dot{M}_{A,out}$) é relacionada por:

$$\begin{aligned} n''_{A,x+dx} dydz &= n''_{A,x} dydz + \frac{\partial [n''_{A,x} dydz]}{\partial x} dx \\ n''_{A,y+dy} dx dz &= n''_{A,y} dx dz + \frac{\partial [n''_{A,y} dx dz]}{\partial y} dy \\ n''_{A,z+dz} dx dy &= n''_{A,z} dx dy + \frac{\partial [n''_{A,z} dx dy]}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde n''_A é o fluxo absoluto de massa do constituinte A . Este fluxo está relacionado com a velocidade absoluta do constituinte, v_A , através da expressão:

$$n''_A = \rho_A v_A \quad (2.54)$$

sendo a resultante do fluxo difusivo j_A com o fluxo associado ao escoamento do fluido, de acordo com a expressão: a relação (2.54) é substituída por:

$$n''_A = j_A + \rho_A v \quad (2.55)$$

A geração interna do constituinte A pode ser escrita na forma:

$$\dot{M}_{A,g} = \dot{n}_A dV \quad (2.56)$$

onde \dot{n}_A é a taxa de geração da massa do constituinte A por unidade de volume da mistura.

Substituindo as taxas de fluxo de entrada, dadas por $n''_{A,x}$, $n''_{A,y}$ e $n''_{A,z}$, as taxas de fluxo de saída dadas pelas equações (2.53), e as relações (2.56) e (??) na equação (2.52), obtém-se:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\frac{\partial n''_A}{\partial x} - \frac{\partial n''_A}{\partial y} - \frac{\partial n''_A}{\partial z} + \dot{n}_A \quad (2.57)$$

Atendendo à definição de fluxo absoluto, dada pela equação (2.55), vem:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(j_A + \rho_A v) - \frac{\partial}{\partial y}(j_A + \rho_A v) - \frac{\partial}{\partial z}(j_A + \rho_A v) + \dot{n}_A \quad (2.58)$$

ou seja

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_A u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_A v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_A w) = -\frac{\partial j_{x,A}}{\partial x} - \frac{\partial j_{y,A}}{\partial y} - \frac{\partial j_{w,A}}{\partial w} + \dot{n}_A \quad (2.59)$$

2.2.2 Relações Constitutivas

As equações (2.36), (2.42), (2.50) e (2.59) traduzem equações de conservação respectivamente da massa, da quantidade de movimento, da energia e das espécies, sendo a sua formulação universal. Estas quatro equações são, contudo, função de mais do que quatro variáveis, necessitando de informação adicional para a partir delas ser possível estudar um dado processo físico. Ora, as relações constitutivas definem modelos matemáticos dos processos envolvidos como por exemplo a difusão de calor ou a difusão de momento, permitindo completar o sistema das equações de conservação. Com o objectivo de obter a formulação físico-matemática do fenómeno de dupla difusão, que ocorre na zona gradiente do Lago Solar, torna-se pois, necessário adicionar às equações de conservação algumas relações deste tipo, as quais se apresentam de seguida.

- **Lei de Fourier** Nos meios isotrópicos a relação entre o fluxo de calor e o campo de temperaturas é dada pela Lei de Fourier, expressa por:

$$q'' = -k_w \nabla T \quad (2.60)$$

Nesta equação, o fluxo de calor q'' designa a taxa de calor transferido por unidade de área perpendicularmente à direcção de transferência. A constante de proporcionalidade k_w designa a propriedade de transporte conhecida por condutividade térmica, a qual é uma característica do material. O sinal menos resulta do facto do calor ser transferido no sentido das temperaturas mais baixas.

A difusibilidade térmica é também uma característica do material, a qual é traduzida por:

$$K_T = \frac{k_w}{\rho C_p} \quad (2.61)$$

onde C_p designa o seu calor específico. A introdução da relação (2.61) na expressão (2.60) conduz a:

$$q'' = -K_T \nabla (\rho C_p T) \quad (2.62)$$

Esta forma de escrever a lei de Fourier, em termos de difusibilidade térmica, vai ter importância na modelação da zona duplamente difusiva do Lago Solar.

- **Energia interna** Num fluido a energia interna e é considerada como sendo, apenas, função da temperatura T , pelo que $e = f(T)$. A partir desta expressão tem-se que:

$$e = e(T), \quad \text{com} \quad \frac{\partial e}{\partial T} = \rho C_p \quad (2.63)$$

- **Lei de Fick** A Lei de Fick dada por

$$j_A = -D_A \nabla \rho_A \quad (2.64)$$

é equivalente à lei de Fourier para a difusão de um dado constituinte onde nesta relação D_A designa a difusibilidade molecular do componente A , na solução, dependendo fundamentalmente da temperatura e da concentração molecular do constituinte A .

O fluxo de difusão j_A define-se como a quantidade de massa A que é transferida por unidade de tempo e por unidade de área, perpendicularmente à direcção de transferência.

Observe-se que, o fluxo de difusão j_A é proporcional ao gradiente de concentração $\nabla \rho_A$, da mesma forma que o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura, ∇T .

No caso do componente A ser o cloreto de sódio, a equação de difusão da concentração salina assume a forma:

$$j_A = -K_S \nabla S \quad (2.65)$$

onde K_S designa o coeficiente de difusão molecular e ∇S o gradiente de concentração salina.

- **Tensão de corte** No caso particular de fluidos newtonianos a tensão de corte τ , de componente genérica τ_{ij} , está relacionada com o campo cinemático, através da equação:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.66)$$

A tensão de corte traduz um fluxo difusivo da quantidade de movimento, processando-se no sentido dos níveis de maior para os de menor valor da quantidade de movimento, uniformizando desta forma o campo de velocidades.

Atribui-se assim a τ o significado de fluxo de quantidade de movimento, por analogia com a lei de Fourier.

- **Equação de Estado** Num fluido onde coexistam dois gradientes, um de temperatura e um de salinidade, a densidade do fluido está relacionada com o valor da temperatura e da concentração salina através da expressão:

$$\rho = \rho_m + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_m) + \frac{\partial \rho}{\partial S} (S - S_m) + \dots \quad (2.67)$$

onde os termos de ordem superior são desprezados e o índice m designa valores médios de referência. Por manipulação algébrica da equação (2.67), e desprezando os termos de ordem superior a um, obtém-se a equação de estado:

$$\rho_m - \rho = \rho(\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \quad (2.68)$$

onde α e β são os coeficientes de expansão térmica e de expansão salina dados, respectivamente, por:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.69)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p \quad (2.70)$$

que indicam a variação de densidade do fluido com a temperatura e a concentração salina.

2.2.3 Equações do Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes com geração interna de calor

O escoamento de um fluido fica completamente definido pelas equações de conservação, da massa (2.37), da quantidade de movimento (2.42) e da energia (2.50), pelas relações constitutivas e por um conjunto apropriado de condições de fronteira e/ou iniciais.

Torna-se agora necessário particularizar as quatro equações de conservação obtidas, para o problema em estudo, adicionando as relações que traduzam o comportamento inicial da temperatura e da concentração salina, e posteriormente as respectivas condições de fronteira. Com esta sistematização pretende-se fechar o modelo das equações descritivas do problema de dupla difusão, no caso concreto da zona gradiente do Lago Solar.

Assim, efectua-se de seguida a introdução das relações constitutivas nas leis de conservação.

Equação de conservação da massa

Num escoamento incompressível, $\rho = const.$, a equação de conservação da massa (2.36) reduz-se a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.71)$$

equação que corresponde, em coordenadas cartesianas, a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.72)$$

Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Considere-se a equação da quantidade de movimento dada por (2.42). Introduzindo a relação constitutiva traduzida pela equação (2.66) obtém-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (2.73)$$

Esta equação é conhecida por Equação de Navier-Stokes sendo a sua equivalente vectorial dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (2.74)$$

A representação cartesiana desta equação, considerando $\mathbf{f} = (X, Y, Z)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho X \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho Y \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho Z \end{aligned} \quad (2.75)$$

O significado físico dos termos da equação (2.74) é o seguinte:

- O primeiro membro representa a variação total da quantidade de movimento por unidade de massa do elemento de fluido. Para este efeito contribuem:
 1. a variação ao longo do tempo da velocidade do escoamento (variação temporal);
 2. a variação convectiva associada ao transporte do elemento de fluido de um dado ponto do espaço para outro.
- O segundo membro representa as forças aplicadas ao elemento de fluido, fontes de quantidade de movimento, traduzindo:
 1. as duas primeiras parcelas, as forças de superfície, que englobam as contribuições do gradiente de pressões estáticas e da viscosidade;
 2. a terceira parcela, as forças mássicas.

O termo das forças mássicas que figura na equação (2.74) pode ter diferentes origens. No caso em análise, a única força exterior a agir sobre o fluido é a gravidade:

$$\vec{f}_g = -g\vec{k} \quad (2.76)$$

com g aceleração da gravidade e \vec{k} o versor do eixo dos zz . Introduzindo esta relação na equação (2.74) obtém-se:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \rho g \vec{k} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.77)$$

Conclui-se a partir da análise da solução estacionária desta equação, que a força mássica por unidade de superfície é equilibrada exactamente por uma pressão $p - p_0 = -\rho g \vec{k}$ designada por hidroestática. Para o escoamento contribuem então só os desvios em relação à pressão hidroestática dados por $-(p + \rho g \vec{k})$.

Aproximação de Boussinesq

Por vezes é possível simplificar a equação da conservação da quantidade de movimento observando que as variações induzidas por variações de temperatura na densidade e nos diferentes coeficientes são desprezáveis. Existe, contudo, uma importante excepção no caso dos processos de convecção natural: a variação da densidade no termo ρf_i não pode ser ignorada, uma vez que a aceleração resultante nesse termo é a responsável pelo movimento.

A aproximação de Boussinesq corresponde a manter a densidade constante em todos os termos excepto no termo da força mássica. Nestas condições, a equação (2.77) vem substituída por:

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla \mathbf{p} - \rho \mathbf{g} \vec{k} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.78)$$

ou seja

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla \mathbf{p} - \frac{\rho}{\rho_m} \mathbf{g} \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.79)$$

com $\nu = \mu/\rho_m$. Introduzindo a relação constitutiva dada pela equação (2.68) em (2.79) obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p - [1 - \alpha(T - T_m) + \beta(S - S_m)] g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.80)$$

e agrupando os termos em (2.80):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla (p + \rho_m g z) + [\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)] g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.81)$$

Fazendo

$$P = p + \rho_m g z \quad (2.82)$$

onde P designa o valor da pressão total local, obtém-se a equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla P + [\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)] g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.83)$$

sendo a segunda parcela do segundo membro a força de impulsão que origina os movimentos convectivos devidos às variações de densidade.

Equação de conservação da energia

Com o objectivo de estabelecer a equação de conservação da energia, admitem-se duas relações constitutivas; a lei de Fourier (2.60) e a que relaciona a energia interna e com a temperatura T traduzida na equação (2.63). Introduzindo estas relações na equação (2.50) vem:

$$\rho \frac{D}{Dt} (C_p T) = \nabla \cdot (k_w \nabla T) + \dot{q} + \mu \Phi \quad (2.84)$$

A dissipação por viscosidade é em geral desprezada, uma vez que a sua consideração implica um aumento de esforço computacional na resolução aproximada do problema, sem que traga qualquer contribuição apreciável.

Desenvolvendo a derivada total que figura no primeiro membro, obtém-se:

$$\rho \left(\frac{\partial(C_p T)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(C_p T) \right) = \nabla \cdot (k_w \nabla T) + \dot{q} \quad (2.85)$$

Atendendo ao facto do calor específico C_p ser admitido como constante, tem-se:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k_w \nabla T) + \dot{q} \quad (2.86)$$

e fazendo um rearranjo em ambos os membros resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left(\frac{k_w}{\rho C_p} \nabla T \right) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (K_T \nabla T) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.88)$$

Em termos de coordenadas cartesianas a equação (2.88) vem traduzida por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.89)$$

Equação de conservação da espécie (sal)

A equação (2.59) pode exprimir-se vectorialmente através da equação:

$$\frac{D\rho_A}{Dt} = -\nabla \cdot j_A + \dot{n}_A \quad (2.90)$$

Introduzindo a relação (2.65), a equação de conservação das espécies (2.90) para o caso da componente A ser o cloreto de sódio, designando S a concentração salina, e na ausência de geração interna de sal, assume a forma:

$$\frac{DS}{Dt} = \nabla \cdot (K_S \nabla S) \quad (2.91)$$

A equivalente vectorial desta equação é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (K_S \nabla S) \quad (2.92)$$

a qual, em coordenadas cartesianas, corresponde a:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_S \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_S \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (2.93)$$

Observe-se que esta equação é análoga à equação deduzida para o campo das temperaturas a partir da equação de conservação de energia, diferindo apenas na parcela que resulta da geração interna.

2.2.4 Equações da zona gradiente do Lago Solar

Para a determinação das equações descritivas da zona gradiente do Lago Solar consideraram-se os tipos de transferências associados aos campos velocidade, temperatura e salinidade, e estabeleceram-se as respectivas variações para um dado elemento de fluido, perante os efeitos que actuam sobre esse elemento.

O sistema de EDP's é , nestas circunstâncias, dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla P + (\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.94)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (K_T \nabla T) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (K_S \nabla S) \quad (2.97)$$

$$\rho_m - \rho = \rho (\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \quad (2.98)$$

Este sistema é constituído por equações às derivadas parciais, não lineares, de 2ª ordem. A não linearidade deve-se à existência do termo convectivo, nas equações de conservação da quantidade de movimento, da energia e do sal, enquanto que o termo difusivo da equação da quantidade de movimento implica que o sistema seja de segunda ordem. Como se trata de um problema de propagação, o sistema é do tipo parabólico.

No presente trabalho considera-se uma análise bidimensional da camada de fluido representativa da zona gradiente do Lago, sendo a direcção horizontal representada no eixo dos xx e a vertical no eixo dos zz . A camada de fluido é considerada infinita segundo o eixo dos yy .

A hipótese de bidimensionalidade não é restritiva uma vez que o efeito que lidera o processo de convecção na zona gradiente é a absorção de radiação solar, cuja contribuição se faz sentir ao longo do eixo dos zz , sendo desprezáveis as variações segundo os outros dois eixos. A introdução da terceira dimensão traria, contudo, um aumento substancial de esforço computacional.

Com o objectivo de simplificar o problema, uma vez que a equação da continuidade fica automaticamente verificada, introduz-se a função de corrente ψ definida, de uma forma implícita, por:

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.99)$$

passando a variável velocidade \mathbf{v} a ser substituída pela variável dependente ψ .

Escrevendo a velocidade em termos da função de corrente ψ e aplicando o operador ∇^* dado por:

$$\nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial z}, 0, -\frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.100)$$

à equação (2.94), o sistema de equações descritivo da zona gradiente do Lago Solar reduz-

se agora a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \psi = -g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x}\right) + J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (2.101)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K_T \nabla)\right) T = J(\psi, T) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.102)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K_S \nabla)\right) S = J(\psi, S) \quad (2.103)$$

onde J denota o operador Jacobiano definido (para o caso de duas funções arbitrárias f e g , nas variáveis x e z) por:

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.104)$$

O Jacobiano $J(\psi, \nabla^2 \psi)$ que figura na equação (2.101) resulta do produto interno $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ da equação (2.74). Nas equações (2.102) e (2.103) os Jacobianos $J(\psi, T)$ e $J(\psi, S)$ são consequência dos produtos internos $-\mathbf{v} \cdot \nabla T$ e $-\mathbf{v} \cdot \nabla S$ que figuram respectivamente nas equações (2.88) e (2.92).

Este sistema de equações, (2.101)-(2.103), serve de base a toda a análise desenvolvida neste trabalho.

Para a obtenção da solução deste sistema é necessário complementá-lo com um conjunto de condições iniciais e de fronteira apropriadas. Estas condições são apresentadas no Capítulo 5, para as diferentes situações previstas na descrição físico-matemática da zona gradiente do Lago Solar, perante a contribuição de diferentes efeitos.

Capítulo 3

Estabilidade de Fluidos

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma revisão das Teorias de Estabilidade de escoamentos de fluidos que obedecem às equações de Navier-Stokes. Após uma introdução faz-se um breve resumo da evolução das diferentes Teorias de Estabilidade, detalhando-se, de seguida, a Teoria Linear e a Teoria Global.

Finaliza-se o capítulo com o desenvolvimento do Problema de Rayleigh-Bénard. Nesta apresentação, que segue os textos de Veronis (1968), Schechter et al. (1981) e Costa et al. (1981) aplica-se a Teoria Linear e obtém-se os limites de estabilidade marginal. Enunciam-se, igualmente, os critérios de estabilidade resultantes da aplicação da Teoria Global àquele problema, seguindo a análise efectuada por Joseph (1976a).

3.1.1 O problema da estabilidade: conceitos básicos

O problema da estabilidade de fluidos consiste em saber se um dado escoamento é ou não estável, relativamente a determinadas perturbações.

Do ponto de vista matemático o problema da estabilidade põe-se da seguinte forma: dado um sistema de equações descritivo do escoamento, cuja solução é independente do tempo para as variáveis velocidade \mathbf{v} , pressão p e temperatura T , considera-se um problema de valores iniciais obtido por perturbação, nas variáveis $\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}$, $p + \tilde{p}$ e $T + \tilde{T}$ onde $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}, \tilde{T})$ constituem as perturbações, dependentes do tempo, e analisa-se a solução deste segundo problema. Se esta solução se aproximar da solução do problema não perturbado (\mathbf{v}, p, T) , quando $t \rightarrow \infty$ o escoamento é assintoticamente estável; caso contrário é instável.

A resolução do problema de estabilidade passa, assim, pela obtenção da solução de um sistema de equações diferenciais às derivadas parciais, solução esta de difícil obtenção. Por esta razão é usual efectuarem-se simplificações ao problema matemático retendo, contudo, as principais características físicas do problema.

O estado estacionário de um dado sistema físico define-se como sendo o estado para o qual nenhuma das variáveis do sistema varia com o tempo. Este estado é caracterizado por um conjunto de parâmetros físicos (parâmetros geométricos, parâmetros que caracterizam o campo das velocidades e parâmetros descritivos das forças externas que actuam no sistema, como sejam o gradiente de pressões e o gradiente de temperaturas).

Definição 3.1.1 *A estabilidade de um dado escoamento define-se de acordo com a evolução*

de perturbações sobrepostas ao estado estacionário.

1. Se as perturbações aumentarem de amplitude ao longo do tempo o escoamento diz-se instável.
2. Se as perturbações forem atenuadas, o escoamento diz-se estável.

Assim, para que um escoamento seja estável, é necessário que o seja perante todas as perturbações possíveis. No entanto, o escoamento é instável, se o for pelo menos para uma perturbação.

De acordo com esta classificação é possível delimitar zonas de estabilidade no espaço de fase dos parâmetros característicos de um dado escoamento, designando-se por estabilidade marginal o lugar geométrico que separa as zonas de estabilidade das zonas de instabilidade.

3.1.2 Teoria Linear e Teoria Global

Dado um sistema de equações descritivo de um escoamento de um fluido e o respectivo conjunto de condições de fronteira e de condições iniciais, o procedimento geral para a análise de estabilidade da solução deste sistema consiste em sobrepor perturbações à respectiva solução estacionária e determinar as condições perante as quais a perturbação é atenuada com o tempo. Estas condições vêm expressas através de relações entre os parâmetros característicos do problema.

Existem duas teorias que visam a obtenção destas relações: a Teoria Linear de estabilidade e a Teoria Global de estabilidade (ou de Energia).

A Teoria Linear teve origem em Poincaré (1885) e a Teoria Global iniciou-se com Serrin (1959a), Serrin (1959b) enquanto aplicada aos problemas que envolvem as equações de Navier-Stokes, tendo sido posteriormente generalizada por Joseph (1965, 1966), e por Shir and Joseph (1968).

A Teoria Linear considera que as perturbações impostas são suficientemente pequenas para justificar a retenção, apenas, dos termos lineares do sistema de equações. Esta Teoria tem por base o seguinte procedimento matemático:

1. Impõem-se pequenas perturbações às variáveis do problema, obtendo-se um sistema perturbado;
2. De seguida, desprezam-se os termos não lineares do sistema perturbado e consideram-se soluções da forma $u(x, t) = u^*(x) \exp(\sigma t)$ com σ complexo, para o sistema linearizado;
3. Finalmente, analisa-se o problema de valores próprios associado. A forma como a perturbação varia no tempo está relacionada com o sinal da parte real de σ .

A Teoria Global não impõe qualquer restrição à amplitude das perturbações. Uma vez estabelecido o problema de valores próprios, considera que a perturbação pode ser descrita por um funcional que designa por "energia". Na maior parte dos casos esta energia coincide com a energia potencial do sistema Shir and Joseph (1968). A variação desta "energia" no tempo permite classificar o escoamento, em termos de estabilidade.

A Teoria Global conduz a uma formulação variacional podendo, no entanto, ser complexa a sua aplicabilidade Turner (1985). Acresce ainda que, em geral, só é possível determinar o funcional apropriado para efectuar este tipo de análise em casos muito particulares, ou impondo grandes simplificações ao sistema inicial.

No sentido em que a Teoria Linear fornece condições suficientes para a existência de estados instáveis, e que a Teoria Global estabelece condições suficientes para a existência de estados estáveis, pode dizer-se que as duas teorias se complementam.

Ao fornecer critérios para a existência de instabilidade, a Teoria Linear não estabelece, contudo, qualquer estrutura para essas instabilidades. Por seu lado a Teoria Global, mesmo sendo uma Teoria não linear, não aborda a análise das soluções instáveis, a qual é no entanto possível à luz da Teoria das Bifurcações.

Esta teoria, que consiste no estudo das possíveis variações na estrutura das soluções (ou órbitas) das equações diferenciais não lineares, dependentes de parâmetros, pode trazer alguma contribuição à análise da evolução dos sistemas perturbados, uma vez que a não linearidade destes sistemas acarreta a existência de instabilidades, a qual é condição necessária à existência de bifurcações.

A Teoria das Bifurcações remonta a Lindstedt (1882) e a Poincaré (1885) tendo sido posteriormente desenvolvida por Hopf (1937), o qual na continuação dos estudos levados a cabo por Poincaré generalizou esta técnica, utilizada até então para equações de conservação, às equações dissipativas.

Os resultados de instabilidade, fornecidos pela Teoria Linear podem, pois, ser analisados tendo por base conceitos associados à dinâmica de sistemas não lineares.

3.1.3 Resumo histórico

O estudo da estabilidade de escoamentos de fluidos tem sido objecto de reflexão de vários autores.

A Teoria Linear, em particular, tem sido aplicada a uma vasta gama de problemas. Refira-se, por exemplo a análise de estabilidade da equação de Orr-Sommerfeld desenvolvida por Lindstedt (1882), Reid (1965) e Betchov and Criminale (1967). Drazin and Howard (1966) analisaram a estabilidade de fluidos invíscidos, enquanto Galdi (1975) se dedicou à estabilidade dos escoamentos com rotação e Yih (1965) à estabilidade de escoamentos estratificados.

No que diz respeito à Teoria Global de estabilidade é de referir o método de energia apresentado por Stuart (1958) e que tem vindo a ser aplicado por Reid (1965), Reddy and Voyé (1988) e mais recentemente por Straughan (1992).

A estabilidade do escoamento de Poiseuille foi analisada por diversos autores à luz de ambas as teorias, destacando-se Davies and White (1928), Beavers et al. (1970), Wignanski and Champagne (1973) e Wignanski et al. (1975), o mesmo se passando com o escoamento de Couette analisado, de modo particular, por Mallock (1888), Couette (1890) e Taylor (1923) e posteriormente por Reichardt (1956) e Schulz-Grunow (1958).

Autores como Synge (1938), Stuart (1963), Schen (1964), Monin and Yaglom (1971) e Spasche (1999) produziram artigos de revisão sobre estabilidade de fluidos, tratando os livros destes últimos a estabilidade de problemas não lineares.

O estudo da estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard data do princípio do século,

com Bénard (1900, 1901) embora já tivesse sido abordado por Pearson (1885). Posteriormente foram desenvolvidas análises de estabilidade por autores dos quais se destacam Lord Rayleigh (1916), Chandrasekhar (1961), Block (1956), Sternling and Scriven (1959) e Smith (1966). Segundo Chandrasekhar (1961), Sparrow et al. (1964), Shir and Joseph (1968), Hall and Walton (1977) e Nield et al. (1993) existem soluções aproximadas para o problema de Rayleigh-Bénard. A estabilidade linear deste problema, assumindo geração interna de calor, foi estabelecida por Sparrow et al. (1964), no caso da camada de fluido ser ilimitada, e a estabilidade global foi analisada por Joseph and Shir (1966), coincidindo os resultados obtidos através destas duas teorias segundo Chandrasekhar (1961) e Joseph (1976a).

No caso do problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes a análise começou por seguir a Teoria Linear. No entanto esta análise linear rapidamente evoluiu para o campo não linear, passando o problema da estabilidade a ter uma componente experimental e a ser feita uma simulação numérica das soluções obtidas, com o objectivo de complementar os resultados obtidos com elementos da dinâmica de sistemas não lineares e em especial com elementos da Teoria das Bifurcações. Nesta linha de ideias Koschmieder (1973) efectuou uma análise crítica dos desenvolvimentos teóricos e experimentais relacionados com o problema não linear de Rayleigh-Bénard.

Velarde and Schechter (1971a,b) por seu lado e na sequência de Agar and Turner (1960), analisaram o comportamento do escoamento tendo verificado que os movimentos iniciais são oscilatórios passando, contudo, rapidamente a estacionários após um leve aumento no número de Rayleigh.

As instabilidades oscilatórias, apontadas pela teoria linear, são substituídas por movimentos convectivos entre as camadas; Huppert and Moore (1976) simularam numericamente este processo e concluíram que as possíveis soluções (a oscilatória e a estacionária) exibem um comportamento que inclui uma sequência com duplicação de período.

Constataram igualmente que os movimentos de convecção obtidos para $\tau = 0.1$ se iniciavam para valores de Rayleigh mais baixos do que os estabelecidos pela Teoria Linear.

Toomre et al. (1982) desenvolveram estudos no mesmo sentido; consideraram valores de $\tau = 0.01$ e $R_T = 10^6$ e verificaram que as soluções exibiam um comportamento susceptível de se tornar caótico.

A observação de instabilidades com o desenvolvimento de uma série de movimentos complexos evidenciou a necessidade de uma análise não linear das soluções encontradas, a qual deveria incluir os termos previamente desprezados. A introdução de métodos qualitativos topológico-geométricos no estudo da mecânica, efectuada por Poincaré (1890), foi de capital importância, podendo mesmo afirmar-se que com Poincaré nasceu a teoria dos sistemas dinâmicos.

Nos últimos 30 anos esta teoria, ou estudo qualitativo das propriedades das soluções das equações diferenciais ordinárias, tem tido um desenvolvimento considerável como se constata em Hirsch and Smale (1974), Arnold (1978), Abraham and Marsden (1978), Guckenheimer and Holmes (1983) e Irwin (1980).

Este desenvolvimento foi precedido além dos trabalhos de Poincaré (1890), pelos estudos de Birkhoff (1927) e Andronov and Pontryagrine (1937) sobre estabilidade estrutural, Dulac (1923) sobre ciclos limite e Peixoto (1959) sobre classificação topológica de campos de vectores bidimensionais.

De referir ainda que a análise do problema de dupla difusão pode tornar-se bastante complicada com a alteração da geometria envolvida. Por exemplo, num domínio limitado é bastante complexa, tendo sido desenvolvidas diferentes aproximações; Davis (1967) utilizou uma aproximação de Galerkin do problema linearizado, para analisar o comportamento de um fluido contido num dispositivo rectangular.

Charlson and Sani (1976) utilizaram igualmente uma aproximação de Galerkin para analisar o comportamento de um fluido contido num cilindro tendo estudado as propriedades e a estabilidade das soluções de bifurcação assimétricas encontradas.

Stork and Muller (1972, 1975) desenvolveram experiências que evidenciaram os resultados previamente obtidos numericamente por Davis (1967) e Sani (1964a).

Este tipo de resultados, decorrente da análise de estabilidade de fluidos, tem implicação no comportamento de sistemas de equações às derivadas parciais, que descrevam outros sistemas físicos tendo vindo a desenvolver-se bastante trabalho teórico neste sentido. Por exemplo, Marzec and Spiegel (1980) e Proctor (1981) com base nos resultados obtidos, aplicaram os mesmos métodos para abordar problemas semelhantes com outros sistemas físicos. Saliente-se que, a ligação entre as a Teoria Linear e a Teoria Global, tem sido analisada por Galdi and Straughan (1985), no estudo de movimentos gravitacionais de microorganismos em suspensão num reservatório com água e em aplicações de magnetohidrodinâmica, Galdi (1975).

3.2 Análise de Estabilidade

Nesta secção analisa-se a estabilidade de um fluido viscoso e incompressível que ocupa um domínio $V(t)$ de fronteira $S(t)$. O campo das velocidades $\mathbf{v}(x, t)$ é descrito pelas equações de Navier-Stokes vindo as equações de conservação da quantidade de movimento e de conservação da massa dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + F(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2)$$

onde p designa a pressão, $F(\mathbf{x}, t)$, o campo das forças externas por unidade de massa e ν a viscosidade cinemática.

As condições de fronteira associadas a (3.1)-(3.2) são dadas por:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_S(x, t), \quad x \in S(t), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

sendo \mathbf{v}_S a velocidade na fronteira. A condição inicial é

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad x \in V(0) \quad (3.4)$$

designando \mathbf{v}_0 a velocidade em $t = 0$, com:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0(x) = 0, \quad x \in V(0) \quad (3.5)$$

Com o objectivo de estudar a estabilidade da solução do problema (3.1)-(3.2), adicionam-se perturbações arbitrárias, às variáveis \mathbf{v} e p , e determinam-se as condições para as quais elas são atenuadas com o tempo.

Suponha-se pois que as condições iniciais são perturbadas vindo a solução de (3.1)-(3.2) dada por $\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}$ e $p + \tilde{p}$ sendo $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$ a perturbação.

Introduzindo esta perturbação no problema (3.1) é-se conduzido ao problema de valores iniciais dado por:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{p} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_S = 0 \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{v}}_0(x) \quad (3.9)$$

A análise de estabilidade da solução estacionária do problema (3.1)-(3.2) é feita a partir do sistema de equações (3.6)-(3.9).

Existem dois procedimentos distintos para proceder a esta análise: de acordo com a Teoria Linear considera-se que as perturbações são suficientemente pequenas para justificar a retenção apenas dos termos lineares em $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$, enquanto que na Teoria Global a amplitude da perturbação não sofre qualquer constrangimento.

3.2.1 Teoria Linear

A Teoria Linear considera que as perturbações adicionadas ao estado estacionário do sistema de equações (3.1)-(3.2) são suficientemente pequenas para permitir desprezar o termo não linear $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}$, vindo a equação (3.6) substituída por:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + L[\mathbf{v}, \nu] \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{p} = 0 \quad (3.10)$$

onde

$$L[\mathbf{v}, \nu] a_i \equiv \mathbf{v} \cdot \nabla a_i + \mathbf{a} \cdot \nabla v_i - \nu \nabla^2 a_i \quad (3.11)$$

Considerando que as perturbações $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$ são dadas por:

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, t) = \exp(\sigma t) \xi(x) \quad (3.12)$$

$$\tilde{p}(x, t) = \exp(\sigma t) \phi(x) \quad (3.13)$$

onde σ é um número complexo e substituindo estas equações em (3.10) obtém-se um sistema linear autónomo dado por:

$$\sigma \xi + L[\mathbf{v}, \nu] \xi + \nabla \phi = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \xi = 0 \quad (3.15)$$

$$\xi|_S = 0 \quad (3.16)$$

Os números σ representam os valores próprios de (3.14)-(3.16) e as soluções não triviais (ξ, ϕ) são as respectivas funções próprias.

Definição 3.2.1 *Um escoamento diz-se:*

1. estável, se $\text{Re}(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma;$

2. *marginalmente estável, se existir um valor próprio tal que $\text{Re}(\sigma) = 0$ e $\text{Re}(\sigma) < 0$ para os restantes valores próprios;*
3. *instável, se pelo menos um valor próprio tiver $\text{Re}(\sigma) > 0$.*

As soluções de estabilidade marginal ($\text{Re}(\sigma) = 0$) são de dois tipos:

1. se $\text{Im}(\sigma) = 0$ a solução é estacionária;
2. se $\text{Im}(\sigma) \neq 0$ a solução é periódica.

A transição de um estado estável para um estado instável pode, pois, processar-se através de um estado marginal estacionário ou oscilatório.

Se no início das instabilidades prevalece uma configuração estacionária diz-se que é válido o "Princípio de Troca de Estabilidades", Chandrasekhar (1961). Nesta situação (que corresponde a $\sigma = 0$) a instabilidade estabelece-se em "convecção celular estacionária" (Chandrasekhar (1961), Joseph (1976b)).

Por outro lado, se as instabilidades se iniciarem com movimento oscilatório (situação correspondente a $\text{Re}(\sigma) = 0$ e $\text{Im}(\sigma) \neq 0$) diz-se que a situação é de "sobrestabilidade".

Obs. 3.2.1 *O termo "Troca de estabilidade" surgiu pela primeira vez num artigo de Poincaré (1885) sobre o equilíbrio de massas líquidas em rotação. Poincaré analisou a bifurcação das configurações em equilíbrio, observando que ocorre uma "troca" entre a estabilidade de uma dada configuração pela estabilidade de outra configuração de equilíbrio.*

Actualmente o conceito designado por "Princípio de troca de estabilidades" foi introduzido por Jeffreys (1926). De acordo com este autor quando num escoamento básico se tem $\sigma = 0$ o escoamento bifurca (isto é apresenta duas soluções distintas) dando origem a um segundo estado estacionário que pode ser estável ou não. Na concepção de Poincaré a troca de estabilidades não estava propriamente relacionada com a estabilidade.

A estabilidade da solução periódica $\mathbf{v}(x, t, \nu) = \mathbf{v}(x, t + T, \nu)$ é analisada considerando que as funções (ξ, ϕ) que figuram nas expressões das perturbações $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$ são periódicas, vindo as perturbações dadas por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(x, t) \\ \tilde{p}(x, t) \end{bmatrix} = \exp(\gamma t) \begin{bmatrix} \xi(x, t) \\ \phi(x, t) \end{bmatrix} = \exp(\gamma t) \begin{bmatrix} \xi(x, t + T) \\ \phi(x, t + T) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde γ é um número complexo. Esta representação conduz, a partir da linearização de (3.6), ao sistema dado por:

$$\gamma \xi + \frac{\partial \xi}{\partial t} + L[\mathbf{v}, \nu] \xi + \nabla \phi = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \xi = 0 \quad (3.19)$$

$$\xi(x, t) = \xi(x, t + T) \quad (3.20)$$

$$\xi|_S = 0 \quad (3.21)$$

O tipo de representação dado por 3.17 encontra-se desenvolvida em Joseph (1976b) para sistemas de equações diferenciais ordinárias. A extensão às equações com derivadas parciais pode ser vista nos artigos de Yudovich (1970) e de Iooss (1972).

A estabilidade assintótica das soluções periódicas $\mathbf{v}(x, t, \nu) = \mathbf{v}(x, t+T, \nu)$ é garantida quando $\text{Re}(\gamma) < 0$. Nos pontos críticos tem-se: $\text{Re}(\gamma) = 0$ e $\text{Im}(\gamma) \neq 0$, com $\gamma = i\omega$ vindo que:

1. se $\omega = 2n\pi/T$ e $n \in \mathbb{N}$ então a solução $\exp(\gamma t)\xi(x, t)$ é periódica de período T ;
2. se $\omega = \pm\pi/T$ então a solução $\exp(\gamma t)\xi(x, t)$ é periódica de período $2T$
3. se $\omega = \alpha\pi/T$ e $|\alpha| \neq 1$ então a solução $\exp(\gamma t)\xi(x, t)$ é quase periódica de períodos T e $2T/\alpha$.

Observe-se que a relação entre o problema não linear dado por (3.10) e o problema espectral associado (3.14) só pode ser feita por comparação dos dois problemas. Esta relação é estabelecida pelo Teorema de Comparação das Viscosidades críticas. Para enunciar este Teorema convém introduzir alguma nomenclatura. Assim, tem-se que:

- ν_G designa o menor valor de ν que garante a estabilidade global (limite de estabilidade global);
- ν_e designa o menor valor de ν fornecido pela Teoria Global, que garante estabilidade;
- ν_L o menor valor de ν fornecido pela Teoria Linear, que garante estabilidade.

Teorema 3.2.1 *A primeira viscosidade crítica do problema espectral (3.14) não é maior do que a primeira viscosidade crítica da teoria da energia, isto é :*

$$\nu_e \geq \nu_L$$

Um segundo Teorema compara o problema não linear (3.10) com o problema espectral podendo ser considerado como um teorema de estabilidade condicional.

Teorema 3.2.2 (Estabilidade Condicional ou Princípio da Estabilidade Linear) *Seja $\text{Re}(\sigma) < 0$. Então, existe uma constante positiva $\delta > 0$ tal que:*

$$\mathcal{E}(0) < \delta \Rightarrow \mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

Se $\text{Re}(\sigma) > 0$ então $\mathbf{v}(x, \nu)$ é instável.

onde $\mathcal{E}(0)$ designa a energia associada a uma perturbação inicial. Este Teorema, cuja demonstração pode ser vista em Sattinger (1970), afirma que, se os valores próprios do problema espectral tiverem $\text{Re}(\sigma) < 0$, então a solução nula é assintoticamente estável, pelo menos para pequenas perturbações. A importância do Teorema reside no facto de garantir a existência de instabilidades, quando $\text{Re}(\sigma) > 0$.

A constante δ referida no Teorema define um conjunto de valores iniciais que são atraídos para a solução $\tilde{\mathbf{v}} = 0$. Esta constante é designada por raio de atracção para as perturbações condicionalmente estáveis de $\tilde{\mathbf{v}} = 0$.

3.2.2 Teoria Global

A Teoria Global considera, para o estudo da estabilidade, não o problema (3.6) mas um problema associado à equação descritiva da evolução da energia de uma perturbação. Este conceito nasceu com Reynolds (1895) o qual foi o primeiro autor a estabelecer uma equação de energia e a considerar que a equação evolutiva da energia podia constituir a base de um critério de estabilidade.

De acordo com a definição de estabilidade global, uma solução é globalmente estável se a energia da perturbação tender para zero, quando $t \rightarrow \infty$. Considere-se, então a equação de evolução da energia ¹ a qual, neste caso, é da forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle - \nu \langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle \quad (3.23)$$

onde

$$\langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle = \langle \partial_i \tilde{v}_j, \partial_i \tilde{v}_j \rangle \quad (3.24)$$

é a dissipação média e:

$$\langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \tilde{v}_i \partial_i v_j \tilde{v}_j \rangle = \langle \tilde{v}_i D_{ij}[\mathbf{v}] \tilde{v}_j \rangle \quad (3.25)$$

é o integral da energia que agrupa o escoamento \mathbf{v} à perturbação $\tilde{\mathbf{v}}$, e onde $D_{ij}[\mathbf{v}] = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$.

Pretende-se determinar as condições de estabilidade para a solução $\mathbf{v}(x, t, \mathbf{v}_0)$ face às perturbações introduzidas. O problema da estabilidade para a solução nula surge de perturbar os valores iniciais nulos e é descrito por (3.6)-(3.9) com $\tilde{\mathbf{v}} \not\equiv 0$.

Como já foi referido o sistema (3.1)-(3.4) é equivalente ao problema de valores iniciais dado por (3.6)-(3.9), bastando pois analisar a estabilidade da solução nula $\tilde{\mathbf{v}}(x, t) \equiv 0$ deste sistema.

Seja δ um número que define um conjunto de valores iniciais que são atraídos para a solução $\tilde{\mathbf{v}}(x, t) \equiv 0$ e $\mathcal{E}(0)$ a energia associada à perturbação inicial. Tem, então, lugar a seguinte classificação para a solução nula.

Definição 3.2.2 *A solução nula do problema (3.6) é*

1. *estável, se $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0) \rightarrow 0$ (conceito de estabilidade assintótica em média);*
2. *condicionalmente estável, se existe um valor $\delta > 0$ tal que a solução nula é estável quando $\mathcal{E}(0) < \delta$;*
3. *incondicionalmente estável ou globalmente estável se, na condição anterior, $\delta \rightarrow \infty$;*
4. *monótonamente estável se, cumulativamente:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0) \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

$$d\mathcal{E}(t)/dt \leq 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.27)$$

relativamente a perturbações das condições iniciais.

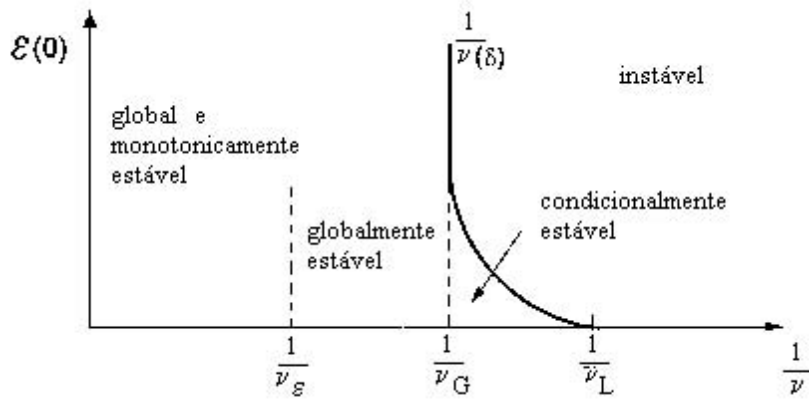


Figura 3.1: Limites de estabilidade de um escoamento

A Figura 3.1 estabelece um diagrama de estabilidade de um escoamento de acordo com Joseph (1976a). Neste diagrama as diferentes regiões são determinadas pelo parâmetro característico ν e pela energia associada à perturbação inicial $\mathcal{E}(0)$, sendo os escoamentos estáveis separados dos escoamentos instáveis por uma curva, designada por curva de estabilidade marginal. De acordo com o observado na Figura 3.1, e por analogia com a Definição (3.2.2), pode concluir-se que:

1. O escoamento será designado por "condicionalmente estável" se existir um valor δ positivo tal que $\mathcal{E}(0) < \delta$ implica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}(0)} \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

2. Se $\delta \rightarrow 0$ o escoamento será designado por "incondicionalmente estável" ou "globalmente estável";
3. Se se verificar em conjunto (3.28) e $d\mathcal{E}(t)/dt \leq 0 \quad \forall t > 0$ o escoamento é descrito como monótonamente estável".

Existem, pois, duas situações de instabilidade:

1. instabilidade supercrítica, correspondendo à situação em que o escoamento não é "condicionalmente estável" ($\nu < \nu_L$);
2. instabilidade subcrítica, situação em que o escoamento é "condicionalmente estável" mas não é "incondicionalmente estável" ($\nu_L < \nu < \nu_G$).

Em geral, Leray (1933), a solução estacionária do problema inicial (3.1) existe para todos os valores de $\nu > 0$, mas só existe uma única solução quando $\nu > \nu_G$. Por outras palavras, nos escoamentos que obedecem às equações de Navier-Stokes, se a viscosidade for superior a um dado valor crítico, então todas as soluções do problema de valor inicial tendem de uma forma monótona para um só escoamento: o escoamento limite.

¹A forma de obter a equação de evolução encontra-se descrita em Joseph (1976b).

Teoremas de Existência de Estabilidade

A demonstração da existência de estabilidade deve-se a Thomas (1942) segundo o qual o movimento de um fluido é monótonamente estável, no sentido em que $d\mathcal{E}/dt < 0$, quando as componentes do tensor D são suficientemente pequenas. Este resultado é consequência de o primeiro valor crítico para a viscosidade ser limitado superiormente.

O objectivo desta secção é enunciar a existência desse primeiro valor crítico para a viscosidade, ν_ϵ , o qual separa as perturbações cuja energia pode aumentar inicialmente, das perturbações cuja energia decai monotonamente.

Tem-se que ν_ϵ é limitado superiormente se o raio de dissipação da energia:

$$\langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle / \langle |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle \quad (3.29)$$

for limitado inferiormente, para todo $\tilde{\mathbf{v}}$ que verifique as condições $\tilde{\mathbf{v}}|_S = 0$ e $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$. A existência de um limite inferior para este quociente é enunciada no seguinte Lema de decrescimento constante, cuja demonstração pode ser vista em Serrin (1959a).

Lema 3.2.1 ² *Seja $\tilde{\mathbf{v}}$ um campo de vectores tal que $\tilde{\mathbf{v}}|_S = 0$ e $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$, que se anula na fronteira $S(t)$ de um domínio $V(t)$. Designe-se por l a menor distância entre dois planos paralelos que contenham $V(t)$, de acordo com a Figura 3.2. Então existe uma constante*

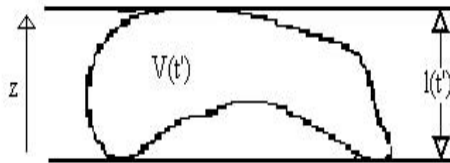


Figura 3.2: Volume $V(t')$ delimitado por dois planos paralelos

$k > 2$ tal que:

$$\frac{l^2}{k} \langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle \geq \langle |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle \quad (3.31)$$

A partir da expressão (3.31) tem-se que a constante k pode ser determinada a partir do problema de máximo dado por:

$$\frac{l^2}{k} = \max_{\mathbf{H}} \frac{\langle |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle}{\langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle} \quad (3.32)$$

onde \mathbf{H} designa o conjunto dos vectores cinematicamente admissíveis (isto é os vectores \mathbf{H} tais que $\mathbf{H}_S = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$). Com este Lema enuncia-se o Primeiro Teorema de Existência o qual explicita o decrescimento monótono associado ao critério $\nu_\epsilon < \nu$.

²O estabelecimento da desigualdade deste Lema tem por base um resultado de Poincaré segundo o qual, dada uma função $\theta(x, y, z)$ regular que se anula na fronteira S de um domínio V , totalmente contido entre dois planos paralelos cuja menor distância é l , existe uma constante $K > 2$ tal que

$$\frac{l^2}{K} \langle |\nabla \theta|^2 \rangle \geq \langle |\theta|^2 \rangle \quad (3.30)$$

Teorema 3.2.3 *Seja $D[\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \nu)] = \mathbf{D}$ o tensor de deformação para uma solução arbitrária do problema de valores iniciais (3.1). Seja $l(t) = \max l(t')$ para $0 \leq t' \leq t$ onde $l(t')$ representa a menor distância entre dois planos paralelos que contenham o volume $V(t')$.*

Então, existe uma constante de decaimento positiva, k , e um limite de estabilidade finito dado por:

$$\nu_\epsilon(\nu, t) = \max_{\mathbf{H}} \frac{-\langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot D[\mathbf{v}(x, t, \nu)] \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\langle |\nabla \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle} \quad (3.33)$$

tal que, quando

$$\nu > \nu_\epsilon(\nu, t'), \quad \text{para } 0 < t' < t \quad (3.34)$$

então

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \exp \left\{ -\frac{2k\nu}{l^2} \int_0^t \left(1 - \frac{\nu_\epsilon}{\nu} \right) dt' \right\} \quad (3.35)$$

Se se tiver ainda:

$$\nu > \nu_\epsilon(\nu) \equiv \sup_{t>0} \nu_\epsilon(\nu, t), \quad \forall t \quad (3.36)$$

então a solução nula de (3.6) é global e monótonamente estável.

Se no instante inicial $\nu \leq \nu_\epsilon(\nu, 0)$, então existe uma condição inicial cinematicamente admissível, para a qual:

$$d\mathcal{E}(0)/dt \geq 0 \quad (3.37)$$

Obs. 3.2.2 *Seja $\bar{\nu}_\epsilon$ o menor valor crítico para a viscosidade, fornecido pela Teoria Global. O critério $\nu > \bar{\nu}_\epsilon$ é suficiente para a estabilidade sendo, de acordo com (3.37), também necessário para a estabilidade monótona, Joseph (1976b). As soluções das equações de Navier-Stokes são monotona e globalmente estáveis quando $\nu > \bar{\nu}_\epsilon$.*

Unicidade da Solução

As soluções do problema de Navier-Stokes, (3.1)-(3.2), têm as seguintes propriedades de unicidade:

1. Existe uma só solução de (3.1)-(3.2);
2. Quando ν é suficientemente grande, todas as soluções de (3.1) tendem para um mesmo escoamento limite.

O objectivo desta secção consiste em diferenciar estes dois tipos de unicidade. A primeira propriedade pode ser enunciada como Teorema de Unicidade para o problema de valores iniciais (3.6).

Teorema 3.2.4 *A solução nula de (3.6) é única.*

De notar que este Teorema não faz qualquer tipo de imposição ao valor da viscosidade. Para valores pequenos da viscosidade, as soluções das equações de Navier-Stokes tendem para um estado turbulento. Mas, quando $\nu > \overline{\nu}_\epsilon$ (onde $\overline{\nu}_\epsilon$ é o limite de estabilidade fornecido pela Teoria da Energia, designado por menor viscosidade crítica), os teoremas de estabilidade de energia garantem que todas as soluções tendem para uma solução limite a qual é unívocamente determinada pelo conjunto de valores:

$$\{\mathbf{v}_S(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{V}(\mathbf{t})\} \quad (3.38)$$

Mais precisamente, considerem-se as soluções em que o conjunto dos dados (3.38) é ou estacionário ou periódico em t de período T , ou quase periódico em t . O Teorema 3.2.4 pode ser reformulado, para as hipóteses consideradas, nos seguintes termos:

Teorema 3.2.5 *Seja $\nu > \overline{\nu}_\epsilon$. Então, existe quando muito:*

1. *Uma solução estacionária para (3.1) ou*
2. *Uma solução periódica de período T , para (3.1) ou*
3. *Uma solução quase periódica para (3.1).*

A partir dos Teoremas de Existência e Unicidade conclui-se finalmente:

- quando $\nu > \overline{\nu}_\epsilon$, o escoamento é estável;
- quando $\nu \leq \overline{\nu}_\epsilon$ o escoamento é instável.

3.2.3 Teoria das Bifurcações

O entendimento do comportamento das soluções instáveis implica uma análise do problema não linear (3.6). Embora não esteja desenvolvida uma teoria não linear é possível ter uma ideia do problema em causa, analisando os tipos de solução susceptíveis de ocorrerem em consequência de uma instabilidade.

Designa-se por Teoria das Bifurcações o estudo das possíveis variações da estrutura das soluções de uma dada equação diferencial, induzidas pela variação dos parâmetros. As soluções em causa podem ser estacionárias, periódicas ou quase periódicas.

Um escoamento bifurca se, para um dado valor do parâmetro característico, existirem duas soluções distintas podendo uma ser estável e a outra instável.

As soluções que bifurcam para valores do parâmetro característico estáveis para a Teoria Linear dizem-se subcríticas, enquanto que as soluções que bifurcam para valores do parâmetro característico instáveis são supercríticas.

Considere-se o problema (3.10) antes de ser linearizado e seja $\mathbf{v}(x, \nu)$ um escoamento básico estacionário, parametrizado por um parâmetro que no caso em estudo é ν . Viu-se que este escoamento é globalmente estável se tiver uma viscosidade elevada e se as perturbações se mantiverem pequenas; deixa de ser estável se o valor da viscosidade for inferior ao valor crítico ν_L da Teoria Linear.

Seja $\sigma \neq 0$ um valor próprio simples, isolado de $L[\mathbf{v}, \nu_L]$. A Figura 3.3 ilustra as possíveis situações de bifurcação para o escoamento $\mathbf{v}(x, \nu)$.

A - se $\text{Im}(\sigma) = 0$ o problema (3.10) tem uma solução estacionária;

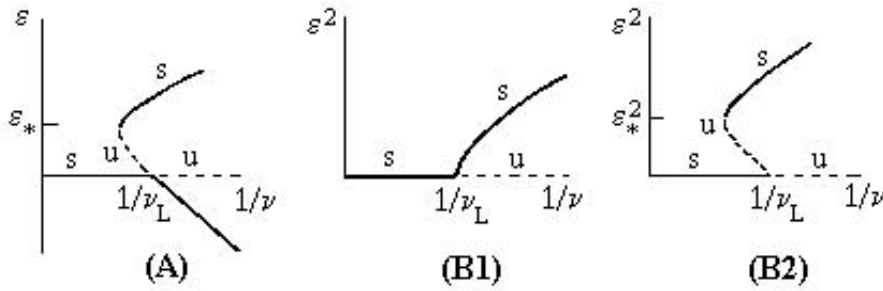


Figura 3.3: Bifurcação a partir de um valor próprio simples: s situação estável, u situação instável. (A) bifurcação no caso estacionário. (B1) bifurcação de uma solução periódica supercrítica; (B2) bifurcação de uma solução o periódica subcrítica.

B -se $\text{Im}(\sigma) \neq 0$ o problema possui soluções complexas da forma $\exp(i\omega t)\tilde{v}(x, \nu)$ periódicas em t , com uma dada amplitude ϵ .

A dimensão do sistema dinâmico e as suas características no ponto de equilíbrio determinam diferentes tipos de bifurcações, sendo a sua forma essencialmente dependente dos termos não lineares. Por exemplo a bifurção que dá origem ao aparecimento de uma órbita periódica ("circulo limite") e a uma solução estacionária (zona de atracção distinta denominada "poço") é designada por bifurcação de Hopf regular, Lichtenberg and Lieberman (1992), podendo a primeira solução ser observada na Figura 3.4 .

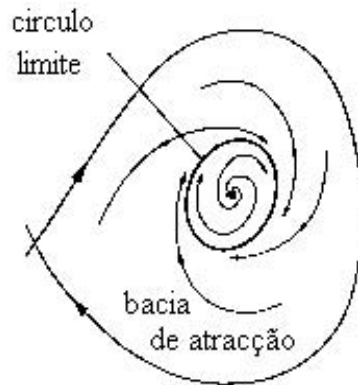


Figura 3.4: Atractor do tipo circulo limite e respectiva zona de atracção

Existem quatro modelos principais que descrevem o desenvolvimento de instabilidades num escoamento, Landau (1944), Hopf (1948). Estes modelos, referidos na Tabela 3.5, dão indicação da transição de regime laminar a regime turbulento referindo os diversos tipos de bifurcações que podem ocorrer. De uma forma resumida tem-se que o modelo de:

Landau (1944) prevê o aparecimento de uma série hierarquizada de instabilidades à medida que o parâmetro característico se afasta de zero;

Ruelle and Takens (1971) sugere que, após a ocorrência de duas bifurcações de Hopf, os efeitos não lineares dão origem a um novo tipo de atractor (atractor estranho

Modelo	Mecanismo								
Landau	Estado estacionário	→	Estado periódico simples	→	Estado periódico duplo	→	Estado periódico triplo	→ ... →	Regime turbulento
Ruelle Takens Newhouse	Estado estacionário	→	Estado periódico simples	→	Estado periódico duplo	→	Estado periódico triplo	→	Atrator estranho
Feigenbaum	Estado estacionário	→	Estado periódico simples	→	Estado periódico simples com harmónica	→	Estado periódico simples com harmónica	→ ... →	Atrator estranho
Pomeau Manneville	Estado estacionário	→	Estado periódico simples	→	Estado caótico intermitente				

Figura 3.5: Modelos para transição de regime em escoamentos de fluidos e respectivos mecanismos não lineares associados

ou caótico). Refira-se que este modelo foi confirmado experimentalmente, no caso da instabilidade de Rayleigh-Bénard associado ao escoamento de convecção natural confinado por Gollub and Benson (1980);

Feigenbaum (1980) segundo este autor o processo de instabilidade iniciar-se-ia a partir de um estado estacionário através de uma bifurcação de Hopf, para um estado periódico caracterizado por uma única frequência, ω ; o aumento do parâmetro característico do escoamento implicaria o aparecimento de uma frequência $\omega/2$, através de uma bifurcação do tipo duplicação de período, repetindo-se este processo até se atingir um determinado valor limite do parâmetro característico, acima do qual se cai numa situação de comportamento associado a um atrator estranho;

Manneville and Pomeau (1980) apontam a possibilidade de uma transição intermitente entre um estado periódico e um estado caótico. Gollub and Benson (1980) e Libchaber and Maurer (1980) confirmaram experimentalmente este modelo.

3.3 Estabilidade do Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes

Nesta secção apresenta-se, com algum detalhe, a análise de estabilidade do problema de dupla difusão de Rayleigh-Bénard a duas componentes, seguindo a Teoria Linear e

referem-se alguns resultados de estabilidade obtidos através da Teoria Global. O estudo da estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes, com base na Teoria Linear, teve como pioneiros Walin (1964), Nield (1967), Veronis (1968), Turner (1968), Stern (1969) e Baines and Gill (1969). O problema consiste na análise da estabilidade de uma camada de fluido aquecida por baixo e na qual se impõe um gradiente salino, tendo todos estes autores adoptado para a sua formulação uma configuração bidimensional e que a camada é infinita na horizontal.

Estes autores propuseram como soluções aproximadas para o campo da temperatura, o campo da salinidade e para o campo da velocidade, desenvolvimentos em série de Fourier que aplicaram directamente ao problema, considerando perfis de temperatura e de salinidade lineares. Com base na análise espectral da Teoria Linear obtiveram os estados marginais de estabilidade, em função dos números adimensionais de Rayleigh térmico e salino.

Na década de 80 esta análise foi sistematizada, nomeadamente, por Schechter et al. (1981) e Costa et al. (1981), os quais prestaram particular atenção à morfologia das soluções instáveis obtidas utilizando a Teoria Linear. Estes autores analisaram o comportamento destas soluções fazendo uso de elementos da Teoria das Bifurcações.

3.3.1 Estabilidade estática

A situação em que o gradiente salino imposto garante a estabilidade da camada é uma situação de estabilidade estática do ponto de vista gravítico. Para analisar este tipo de estabilidade considere-se uma camada de fluido com uma espessura d onde são impostos valores de temperatura e salinidade, nas fronteiras superior e inferior, dados respectivamente por T_d , S_d , T_0 e S_0 , de acordo com a Figura 3.3.1 .

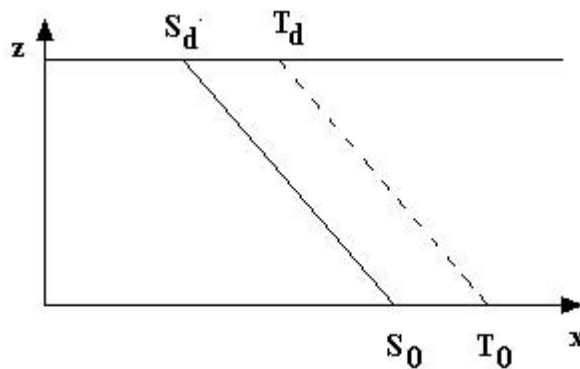


Figura 3.6: Esquema da zona gradiente segundo Veronis

Para que a camada de fluido seja estável do ponto de vista gravítico, isto é mais pesada em baixo do que em cima, é condição necessária que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0 \quad (3.39)$$

onde ρ designa a densidade da solução. Esta densidade depende quer da temperatura quer da concentração, através da equação de estado, como se referiu no Capítulo 2.

Substituindo a equação (2.98) em (3.39) obtém -se:

$$\frac{\partial S}{\partial z} < \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.40)$$

onde α e β são, respectivamente, os coeficientes de expansão térmica e salina.

Designando a diferença de temperaturas entre as fronteiras inferior e superior da camada ($T_0 - T_d$) por ΔT pode concluir-se que:

$$\Delta S > \frac{\alpha}{\beta} \Delta T \quad (3.41)$$

Esta desigualdade significa que em condições estáticas existe um diferencial mínimo de concentração ΔS necessário para a não convectividade, numa camada de altura d , à qual seja imposto uma diferença de temperatura ΔT .

Em condições dinâmicas, este critério de estabilidade não é suficiente uma vez que o efeito conjunto da difusão de sal e de calor pode dar origem a instabilidades susceptíveis de conduzirem ao início de movimento convectivo Schmitt (1979). Conclui-se, assim, que o critério de estabilidade estática traduz uma condição necessária, mas não suficiente.

3.3.2 Estabilidade dinâmica

Teoria Linear

O problema de Rayleigh-Bénard tem como parâmetros característicos os números de Rayleigh térmico e salino. Quando o número de Rayleigh térmico ultrapassa um certo valor crítico o estado estacionário passa a convectivo sendo a transição feita através de movimentos oscilatórios. Esta transição de escoamento é analisada através de processos numéricos existindo vários estudos neste sentido, Moore and Weiss (1973), Marsden and McCracken (1976), Knobloch and Proctor (1981) e Mukutmoni and Yang (1993a,b).

O modelo descritivo do problema de Rayleigh-Bénard assumindo a aproximação de Boussinesq admitindo constantes todas as propriedades físicas do fluido e, ainda, ausência de geração interna de calor, vem dado de acordo com Schechter et al. (1981) por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla P + g \frac{\rho}{\rho_m} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = K_T \nabla^2 T \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = K_S \nabla^2 S \quad (3.45)$$

$$\rho = \rho_m (1 - \alpha(T - T_m) + \beta(S - S_m)) \quad (3.46)$$

onde na equação de estado a densidade média ρ_m é calculada a uma temperatura média T_m e a uma concentração média S_m .

Com a finalidade de analisar a estabilidade da camada de fluido, quando sujeita a gradientes de temperatura e de salinidade, consideram-se os estados estacionários do escoamento.

Solução estacionária

A solução estacionária dos campos velocidade, temperatura e salinidade, obtém-se do sistema diferencial não linear (3.42)-(3.46) fazendo $\mathbf{v} = 0$ e anulando as derivadas temporais, resultando:

$$\mathbf{v}_s = 0 \quad (3.47)$$

$$T_s = T_0 - \Delta T \left(\frac{z}{d} \right) \quad (3.48)$$

$$S_s = S_0 - \Delta S \left(\frac{z}{d} \right) \quad (3.49)$$

onde $\Delta T = T_0 - T_d$ e $\Delta S = S_0 - S_d$.

O estudo da estabilidade da solução estacionária é feito somando a esta solução pequenas perturbações, vindo o sistema (3.42)-(3.46) dado por:

$$\frac{\partial(\tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla(\tilde{p}) + g \frac{\rho}{\rho_m} + \nu \nabla^2(\tilde{\mathbf{v}}) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial(\tilde{T})}{\partial t} - w \frac{\Delta T}{d} = \nabla^2(\tilde{T}) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial(\tilde{S})}{\partial t} - w \frac{\Delta S}{d} = \tau \nabla^2(\tilde{S}) \quad (3.52)$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.53)$$

De seguida adimensionalizam-se as variáveis pelas quantidades dadas por:

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{d} \hat{\mathbf{v}}, \quad (x, y, z) = d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \quad (3.54)$$

$$t = \frac{d^2}{\nu} \hat{t}, \quad p = \frac{\hat{p} d^2}{\rho_m \nu K_T} \quad (3.55)$$

$$T = (\Delta T) \hat{T}, \quad S = (\Delta S) \hat{S} \quad (3.56)$$

Considerando que as perturbações são da forma:

$$\tilde{T} = |\Delta T| \Theta(\hat{z}) \exp(i(k_x \hat{x} + k_y \hat{y}) - \sigma \hat{t}) \quad (3.57)$$

$$\tilde{S} = \Gamma(\hat{z}) \exp(i(k_x \hat{x} + k_y \hat{y}) - \sigma \hat{t}) \quad (3.58)$$

$$\tilde{W} = \frac{\nu}{d} W(\hat{z}) \exp(i(k_x \hat{x} + k_y \hat{y}) - \sigma \hat{t}) \quad (3.59)$$

onde Θ, Γ e W são amplitudes adimensionais, e substituindo-as no sistema (3.50)-(3.53), é-se conduzido a um sistema de equações homogêneas, dado por:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + \sigma\right)W + \frac{k^2}{P_r} R_T \Theta - \frac{k^2}{S_c} R_{sal} \frac{\Gamma}{\Delta S} = 0 \quad (3.60)$$

$$\sigma \Theta + \frac{\Delta T}{|\Delta T|} W + \frac{1}{P_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \Theta = 0 \quad (3.61)$$

$$\sigma \Gamma + \Delta S W + \frac{1}{S_c} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \Gamma = 0 \quad (3.62)$$

Neste sistema as perturbações são componentes de Fourier no plano horizontal, sendo cada componente identificada pelo número de onda $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. As quantidades Pr e Sc designam respectivamente os números de Prandtl e de Schmidt, definidos por:

$$Pr = \frac{\nu}{K_T}, \quad Sc = \frac{\nu}{K_S} \quad (3.63)$$

O número de Prandtl traduz a razão entre a difusão de momento e a difusão do calor enquanto que o número de Schmidt tem um significado idêntico para a difusão molecular, neste caso do Cloreto de Sódio.

Condições de fronteira

No problema em estudo e de acordo com a análise efectuada por Veronis, Schechter, Da Costa, entre outros, as condições de fronteira são condições de Dirichlet para a concentração salina e temperatura e condições de fronteira livre para a velocidade, vindo:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \Theta = \Gamma = 0 \quad (3.64)$$

No caso da temperatura, a situação de condições de fronteira de Dirichlet corresponde á existência de fronteiras altamente condutivas.

Observe-se, no entanto, que as condições de fronteira associadas ao sistema (3.60)-(3.62) podem seguir um de dois modelos no que respeita a velocidade:

1. Fronteiras Livres: condição que traduz a inexistência de fluxos normais e da tensão de corte ser nula, dada por

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 \quad (3.65)$$

2. Fronteiras Rígidas: condição que expressa a necessidade de todas as componentes da velocidade serem nulas. Neste caso, as condições de fronteira para a velocidade vêm dadas por

$$W = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.66)$$

Análise Espectral

Como já se referiu, o sistema de equações diferenciais (3.60)-(3.62) obtém-se a partir do sistema perturbado dado por (3.50)-(3.53). O factor adimensional σ pode ser complexo e de acordo com o exposto ao longo da subsecção 3.2.1, os estados marginais de estabilidade calculam-se a partir de $\text{Re}(\sigma) = 0$. Se, conjuntamente, $\text{Im}(\sigma) \neq 0$, o estado marginal é oscilatório.

Schechter propôs para as amplitudes W, Θ, Γ funções da forma:

$$(W, \Theta, \Gamma) = (A, B, C) \sin(n\pi\hat{z}) \quad (3.67)$$

Introduzindo estas funções no sistema (3.60)-(3.62), obtém-se uma solução não trivial, se e só se o polinómio característico dado por $p(q)$ for igual a zero, onde:

$$p(q) = q^3 - q^2 \left(1 + \frac{1}{S_c} + \frac{1}{P_r}\right) + q \left(\frac{1}{P_r} + \frac{1}{S_c} + \frac{1}{P_r S_c} - \frac{R'_T R'_{sal}}{P_r S_c}\right) - \frac{1}{P_r S_c} + \frac{R'_T}{P_r S_c} - \frac{R'_{sal}}{P_r S_c} = 0 \quad (3.68)$$

com:

$$qa^2 = \sigma, \quad a^2 = n^2\pi^2 + k^2 \quad (3.69)$$

onde n é um número inteiro positivo. Os números R'_T e R'_{sal} dados por

$$R'_T = \frac{R_T k^2}{a^6}, \quad R'_{sal} = \frac{R_{sal} k^2}{a^6} \quad (3.70)$$

exprimem a relação entre as forças de sustentação criadas pelo gradiente térmico, ou pelo gradiente formado pelo soluto, e as forças viscosas.

Observe-se que de acordo com a notação empregue têm lugar as seguintes relações:

$$R_T = \frac{gd^3 \alpha \Delta T}{\nu K_T}, \quad R_{sal} = \frac{gd^3 \beta \Delta S}{\nu K_S}, \quad R_{sal} = \frac{R_S}{\tau}, \quad \tau = \frac{K_S}{K_T} \quad (3.71)$$

A curva de estabilidade marginal definida por $\text{Re}(p(q)) = 0$ obtém-se substituindo $q = i\omega$, com ω real. Separando as partes real e imaginária do polinómio característico (3.68), vem:

$$\text{Re}(p(q)) = \omega^2 \left(1 + \frac{1}{S_c} + \frac{1}{P_r}\right) - \frac{1}{P_r S_c} (1 - R'_T + R'_{sal}) \quad (3.72)$$

$$\text{Im}(p(q)) = \omega \left(-\omega^2 + \frac{1}{S_c} + \frac{1}{P_r} + \frac{1}{P_r S_c} - \frac{R'_T}{P_r} + \frac{R'_{sal}}{S_c}\right) \quad (3.73)$$

1. Quando $\omega = 0$ obtém-se de $\text{Re}(p(q))$ os estados marginais estacionários:

$$R'_T - R'_{sal} = 1 \implies R_T - R_{sal} = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2} \quad (3.74)$$

O valor crítico é definido pelos números de onda k e n que conduzem aos valores mínimos dos gradientes de temperatura e concentração salina que verificam (3.74). Como o menor valor aceitável para n é a unidade resulta que o valor de k que minimiza o segundo membro de (3.74) é $k_c^2 = \pi^2/2$, Schechter et al. (1981). Desta forma, a equação de estabilidade marginal estacionária (3.74), vem dada por:

$$R_T - R_{sal} = \frac{27\pi^4}{4} = 657.511 \quad (3.75)$$

ou de forma equivalente, e na notação de Veronis (1965):

$$R_T = \frac{R_S}{\tau} + \frac{27\pi^4}{4} \quad (3.76)$$

2. Quando $\omega \neq 0$ obtêm-se os estados marginais de início de movimento oscilatório, denominado "sobrestável", vindo:

$$\frac{R_T S_c^2}{(S_c + P_r)(S_c + 1)} - \frac{R_{sal} P_r^2}{(S_c + P_r)(P_r + 1)} = \frac{27\pi^4}{4} \quad (3.77)$$

ou de forma equivalente, e na notação de Veronis (1965):

$$R_T = \left(\frac{P_r + \tau}{P_r + 1} \right) R_S + (1 + \tau) \left(1 + \frac{\tau}{P_r} \right) \frac{27\pi^4}{4} \quad (3.78)$$

vindo a frequência de oscilação dada por:

$$\omega^2 = \frac{1}{P_r} + \frac{1}{S_c} + \frac{1}{P_r S_c} - \frac{4}{27\pi^4} \left(\frac{R_T}{P_r} - \frac{R_{sal}}{S_c} \right) \geq 0 \quad (3.79)$$

Veronis (1965), verificou que o ponto crítico de instabilidade para estados sobrestáveis é dado por um valor de R_T crítico, $R_c = 1797$. Verificou igualmente que quando R_T atinge valores entre 1900 e 2000 começam a desenvolver-se estados convectivos estacionários. Segundo Veronis observa-se (para $R_{sal} = 10^3$):

1. ocorrência de instabilidades oscilatórias, para valores de quando $1797 \leq R_T < 2000$;
2. ocorrência de movimento estacionário de amplitude finita, para valores de $R_T \geq 2000$.

Tanto Veronis (1965) como Sani (1964b) verificaram experimentalmente que pode existir uma solução estacionária de amplitude finita, quando os valores do gradiente de temperatura forem inferiores aos do gradiente térmico indicado pela Teoria Linear da estabilidade. Concluíram que, o efeito dos termos não lineares desprezados pela Teoria Linear poderia estar na base da diferença entre os resultados observados e os resultados obtidos analiticamente.

Segundo Hurlé and Jakeman (1971) e Caldwell (1974) a difusão da temperatura é determinante para o aparecimento da convecção, favorecendo a uniformização do campo da temperatura.

Como se referiu no início desta subsecção Costa et al. (1981) e Nield et al. (1993) estudaram o problema de Rayleigh-Bénard, introduzindo algumas alterações no procedimento a seguir. Assim, optaram por "truncar" os desenvolvimentos em série propostos como funções de aproximação dos campos da temperatura, salinidade e velocidade, com vista a obter um sistema de equações diferenciais não lineares de ordem inferior que pudesse ser integrado por processos numéricos. O objectivo destes autores residia em analisar a transição entre o estado oscilatório e o estado de convecção estacionária.

Costa et al. (1981) considerou, como Veronis (1965) ou Schechter et al. (1981) perfis lineares de temperatura e salinidade dados por:

$$T = T_0 + \Delta T \left[1 - \frac{z}{d} + \Theta(x, z) \right] \quad (3.80)$$

$$S = S_0 + \Delta S \left[1 - \frac{z}{d} + \Gamma(x, z) \right] \quad (3.81)$$

onde Θ e Γ representam perturbações lineares referentes à temperatura e à salinidade. Escrevendo a velocidade \mathbf{v} em termos da função de corrente ψ , aplicando o operador ∇^* ao sistema de equações (2.94)-(2.98) e substituindo T e S pelas soluções propostas, (3.80)-(3.81), obtiveram após adimensionalização:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) \right) = R_T \frac{\partial \Theta}{\partial x} - R_S \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \nabla^4 \psi \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + J(\psi, \Theta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla^2 \Theta \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + J(\psi, \Gamma) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \tau \nabla^2 \Gamma \quad (3.84)$$

sendo este sistema, para o domínio $\{0 < x < \lambda; 0 < z < 1\}$ completado com as condições de fronteira de Dirichlet para a temperatura e para a salinidade e de fronteira livre para a velocidade, dadas por:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \Theta = 0, \quad \Gamma = 0, \quad z = 0, 1 \quad (3.85)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \lambda \quad (3.86)$$

Da Costa considerou como perturbações Θ , Γ e ψ expansões periódicas em x e z , da forma:

$$\psi = 2(2p)^{1/2} \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi z) a(t^*) \quad (3.87)$$

$$\Theta = 2 \left(\frac{2}{p}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi z) b(t^*) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi z) c(t^*) \quad (3.88)$$

$$\Gamma = 2 \left(\frac{2}{p}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi z) d(t^*) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi z) e(t^*) \quad (3.89)$$

com

$$t^* = pt, \quad p = \pi^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.90)$$

e substituindo estas relações no sistema (3.82)-(3.84) obteve o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{a} = Pr[-a + r_T b - r_S d] \\ \dot{b} = -b + a(1 - c) \\ \dot{c} = \varpi[-c + ab] \\ \dot{d} = -\tau d + a(1 - e) \\ \dot{e} = \varpi[-\tau e + ad] \end{cases} \quad (3.91)$$

onde $\dot{a} = da/dt$ sendo:

$$\varpi = \frac{4\pi^2}{p}, \quad r_T = \frac{\pi^2}{\lambda^2 p^3} R_T, \quad r_S = \frac{\pi^2}{\lambda^2 p^3} R_S \quad (3.92)$$

A partir deste sistema de equações Da Costa desenvolveu uma análise qualitativa das respectivas soluções no espaço dos números de Rayleigh modificados, r_T e r_S . Começou por determinar os estados marginais de estabilidade, chegando às rectas (3.76) e (3.78) obtidas por Veronis. Em seguida estabeleceu uma relação entre os segundos membros destas equações.

A partir desta relação obtida, função da frequência de oscilação, desenvolveu uma análise de instabilidades tendo estudado as propriedades do ramo estacionário e do ramo oscilatório. Esta análise encontra-se detalhada em Knobloch and Proctor (1981).

Com o objectivo de visualizar alguns dos resultados apontados por Da Costa considere-se o sistema de equações (3.91). Utilizando o método de Runge Kutta de 4ª ordem de acordo com Ralston and Will (1960) obtém-se as soluções do sistema em $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ e $e(t)$, Joyce et al. (1992).

Nas figuras que se seguem representa-se a evolução da amplitude a (campo das velocidades) com b e c (campo das temperaturas), para valores de R_T e R_S correspondentes às diferentes situações de estabilidade exibidas na Figura 3.7. Estes gráficos foram feitos

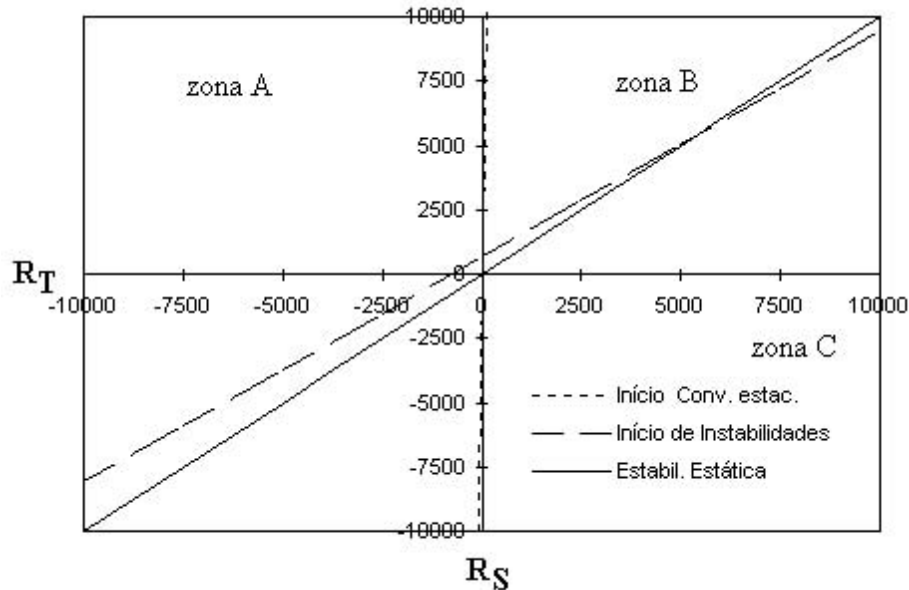


Figura 3.7: Limites de estabilidade de Veronis

utilizando os valores $Pr = 7$ e $\tau = 0.01$, considerados como típicos de um Lago Solar. A Figura 3.8 corresponde a um ponto situado na zona A e traduz uma situação de estabilidade. Inicia-se com uma série de movimentos periódicos e finaliza num ponto (situado no terceiro quadrante), com uma velocidade constante, diferente de zero.

A Figura 3.9 mostra um ponto da zona B e traduz uma situação de movimento oscilatório, periódico, convergindo a solução para um valor (ciclo limite) no espaço de fase (a, bc) . A Figura inicia-se com movimentos periódicos (transiente) estabelecendo-se de imediato (após poucos segundos), um ciclo limite, visível no lado esquerdo da figura.

A Figura 3.10 representa a evolução de um ponto situado na zona C da Figura 3.7 e mostra uma zona de atracção tipo poço após uma espiral (transiente), traduzindo uma situação de condução pura (velocidade nula). Esta situação corresponde a uma solução de estabilidade.

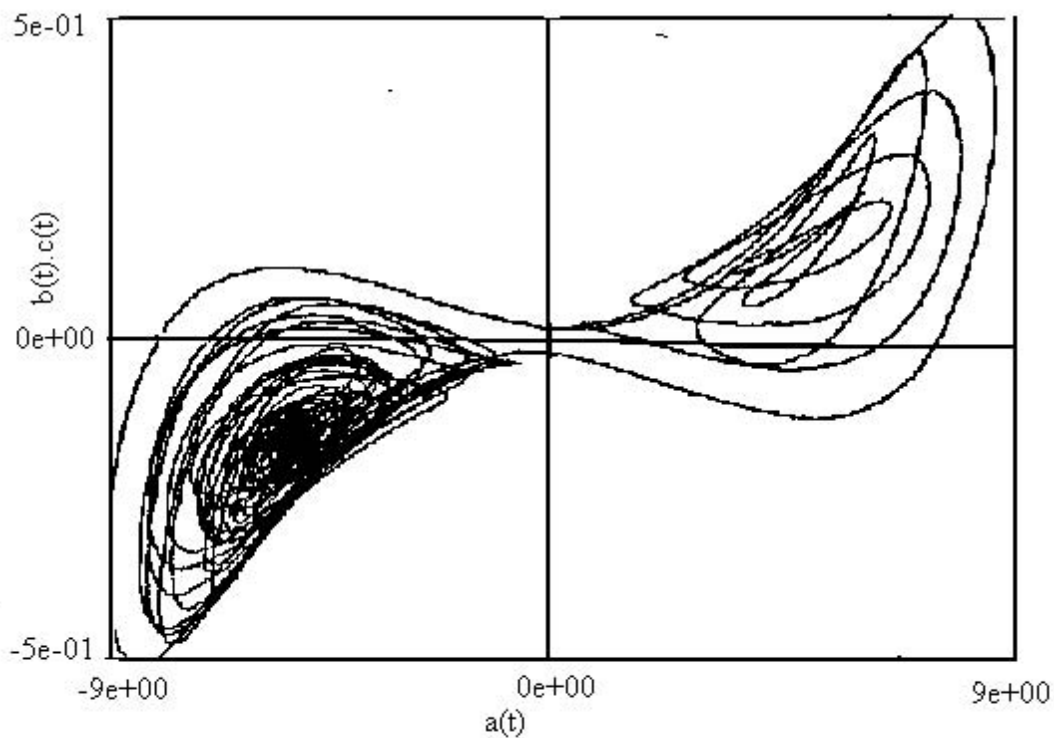


Figura 3.8: Zona A: $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$, $R_T = 5 \times 10^3$, $R_S = -2 \times 10^3$

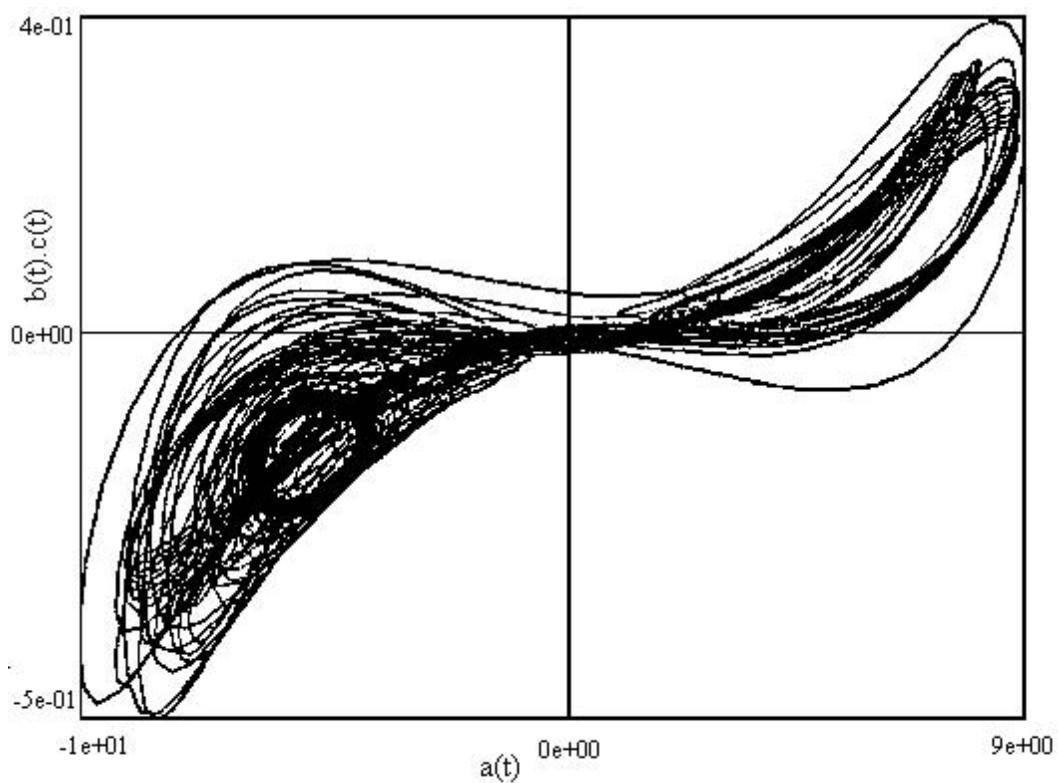


Figura 3.9: Zona B : $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$, $R_T = 1 \times 10^9$, $R_S = 2 \times 10^9$

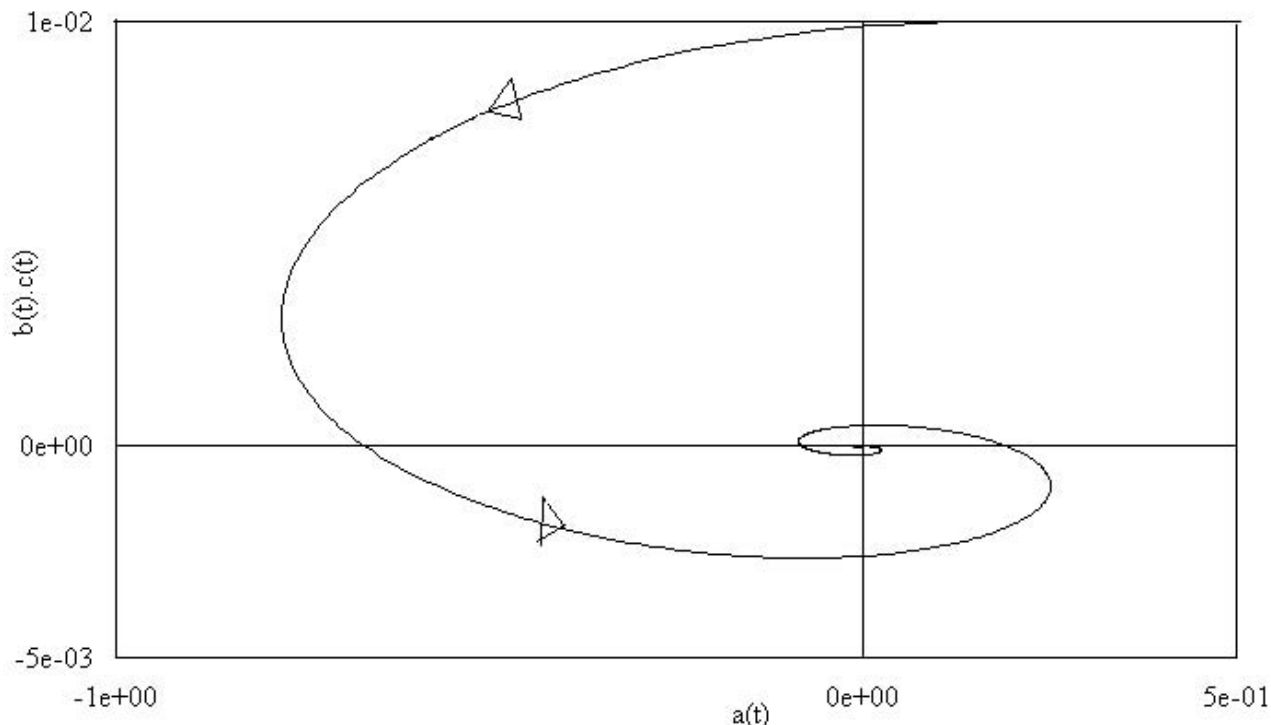


Figura 3.10: Zona C: $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$, para $R_T = -2 \times 10^4$, $R_S = 2 \times 10^4$

Este tipo de análise está de acordo com as conclusões obtidas através da análise linear, e dá uma ideia da morfologia das soluções obtidas.

Teoria Global

Shir and Joseph (1968) definiram "energia" como uma soma $\langle (T - T^*)^2 \rangle$, $\langle (S - S^*)^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$ onde T^* e S^* são os estados das distribuições de temperatura e de concentração salina a ser testados quanto à estabilidade (o parêntesis denota o integral de volume). Como se referiu na subsecção 3.2.2, a condição $d\mathcal{E}/dt < 0$ para todas as perturbações indica que o estado estacionário é globalmente estável. No entanto, no caso do movimento oscilatório, verifica-se que o sistema retorna a $\mathcal{E} = 0$. Quando o limite de estabilidade linear corresponde a condições suficientes para a estabilidade global então esses limites são necessários e suficientes para garantir a não existência de instabilidades de amplitude infinitesimal. Com base na Teoria Global e na definição de "energia" proposta, Shir and Joseph (1968) estabeleceram critérios de estabilidade para o problema de Rayleigh-Bénard, vindo:

1º **Critério** Todos os pares (R_S, R_T) do plano dos números de Rayleigh, que satisfaçam a desigualdade

$$\sqrt{2368} > \sqrt{|R_T| + |\tau R_S|} \quad (3.93)$$

são estáveis. Os pares que não verificam a desigualdade podem ser estáveis ou não.

Note-se que este resultado é independente dos números de Schmidt e Prandtl, dos sinais de R_T e de R_S e das condições de fronteira associadas ao sistema.

2º **Critério** Todos os pares (R_S, R_T) do plano dos números de Rayleigh, que satisfaçam a desigualdade

$$\frac{P_r}{\sqrt{S_c^2 - P_r^2}} \left(\frac{S_c}{P_r} \sqrt{|R_T| - \sqrt{|\tau R_S|}} \right) < \sqrt{R^*} \quad (3.94)$$

onde R^* é o número de Rayleigh crítico para um fluido homogéneo, são estáveis.

Esta desigualdade tem sentido quando:

$$\frac{|\tau R_S|}{|R|} > 1, \quad \frac{S_c}{P_r} > 1 \quad (3.95)$$

As instabilidades de amplitudes finitas, subcríticas, ocorrem quando se verifica qualquer estado que obedeça a (3.94).

Conclusão

Do que foi dito ao longo desta secção, pode concluir-se que, a análise de estabilidade nomeadamente de sistemas de dupla difusão, é um assunto largamente discutido, quer do ponto de vista teórico quer no que toca as observações em laboratório.

A análise efectuada pela Teoria Linear, sendo em muitos casos a possível, pode não ser conclusiva em termos de estabilidade. Contudo, na última década o desenvolvimento de teorias de sistemas dinâmicos tem-se mostrado eficaz para esclarecer alguns pontos menos claros, provenientes da análise linear. Por exemplo, a transição do estado oscilatório para o estado estacionário, a qual exhibe uma situação instável, tem sido objecto de um estudo aturado, cuja ferramenta de análise consiste em elementos da Teoria das Bifurcações. Este tipo de análise tem pois complementado, juntamente com a simulação numérica dos resultados obtidos, a Teoria Linear.

A Teoria Global nem sempre é aplicável aos escoamentos em análise devido à sua formulação mais complexa. Quando é susceptível de ser aplicada os resultados que a mesma tem fornecido não apontam para uma diferença significativa em relação aos resultados obtidos pela Teoria Linear

Capítulo 4

Formulação Numérica

A análise de estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard apresentada no Capítulo 3 propõe como soluções para as variáveis velocidade, temperatura e concentração salina, expansões em série de Fourier. Substituindo estas soluções no sistema formado pelas equações de conservação descritivas do fenómeno de dupla difusão, é determinado o polinómio característico associado ao sistema, a partir do qual decorre a análise de estabilidade.

Autores como Finlayson (1968) e Nield et al. (1993) alteraram este tipo de análise, introduzindo métodos variacionais com o objectivo de obter soluções aproximadas. O polinómio característico do problema espectral associado conduz ao estabelecimento dos limites de estabilidade.

O presente Capítulo tem como objectivos:

- fazer uma apresentação dos métodos de aproximação de soluções;
- aplicar uma formulação fraca ao problema de dupla difusão, cuja formulação físico-matemática foi estabelecida no Capítulo 2.

4.1 Introdução

A maior parte dos fenómenos físicos que ocorrem na Natureza pode ser adequadamente descrita em termos de equações diferenciais. No entanto, só raramente é possível obter a respectiva solução analítica, facto que levou ao desenvolvimento de métodos com a finalidade de se obterem soluções aproximadas.

4.1.1 Métodos de aproximação; vantagens e desvantagens

Dentro dos métodos de aproximação, os mais utilizados são o Método das Diferenças Finitas e os Métodos Variacionais.

Os Métodos Variacionais podem ser encarados como um desenvolvimento da classe dos esquemas clássicos de discretização de equações diferenciais, conhecidos como Métodos de Resíduos Ponderados, (MWR - Methods of Weighted Residuals), Finlayson (1968), Finlayson and Scriven (1966). Os elementos cruciais destes métodos são as funções tentativa (ou funções de aproximação) e as funções teste. As funções tentativa são usadas como funções base da solução, enquanto que as funções teste são utilizadas para garantir que a equação diferencial é satisfeita de uma forma tão exacta quanto possível.

A forma de conseguir esta aproximação traduz-se em minimizar o residuo, isto é, o erro produzido na equação diferencial, pela utilização de um desenvolvimento em série, em substituição da solução exacta, com respeito a uma norma apropriada. Ou de uma forma equivalente em conseguir que o residuo satisfaça uma condição de ortogonalidade apropriada, com respeito a cada uma das funções teste.

Os Métodos Variacionais baseiam-se, pois, quer na minimização de um funcional quadrático associado ao problema dado, quer na minimização do erro na aproximação da solução proposta por uma solução tentativa. São um mecanismo potente ao permitir englobar de uma forma natural algumas condições de fronteira. Observe-se que existem duas classes de condições de fronteira distintas: as condições de fronteira essenciais e as condições de fronteira naturais. As primeiras têm que ser verificadas mas as segundas são, como se verá, obedecidas de uma forma natural. Do ponto de vista da sua utilização, podem-se sintetizar algumas vantagens:

- Os Métodos Variacionais ao reterem a parte espacial das equações, conduzem directamente a um sistema de equações ordinárias, dependente do tempo, complementado pelas condições de fronteira adequadas;
- Como soluções de aproximação proporcionam a utilização de uma vasta gama de funções tentativa uma vez que estas não necessitam de satisfazer as condições de fronteira naturais, encontrando-se estas retidas implicitamente no funcional.

Esta última consideração é bastante importante uma vez que dá a possibilidade de trabalhar com condições de fronteira complexas. Em relação a este método põe-se, contudo, a questão de que nem sempre é possível estabelecer o funcional apropriado correspondente a um dado problema.

No Método das Diferenças Finitas a forma de obter soluções aproximadas consiste em substituir as derivadas que intervêm numa dada equação diferencial por diferenças finitas, discretizando o domínio numa malha e considerando funções tentativa locais a cada um dos elementos da malha, nos quais se subdividiu o domínio. Por seu lado, os diferentes Métodos Variacionais não actuam directamente numa dada equação diferencial, mas sim na formulação variacional da mesma, podendo utilizar funções tentativa globais, válidas em todo o domínio de definição do problema, do tipo polinomial e/ou trigonométrico de qualquer grau.

1. O Método das Diferenças Finitas rege-se por princípios simples (as derivadas são representadas por desenvolvimentos finitos em série de Taylor) sendo fácil de formular e de implementar em termos computacionais. Como desvantagens apresenta dificuldade na implementação das condições de fronteira, em situações de domínios irregulares.

2. O Método dos Elementos Finitos é um Mee todo Variacional onde o domínio é subdividido em elementos, formando o que se designa por malha de elementos finitos.

As funções teste e tentativa são definidas em cada um destes elementos adoptando em cada um deles uma forma simples, em geral um polinómio de grau pouco elevado. As funções, construídas elemento a elemento, são posteriormente ligadas de forma a verificarem a continuidade exigida pelo problema.

Sendo locais a cada elemento da malha, as funções tentativa possibilitam a utilização de domínios com uma geometria irregular.

4.1.2 Classificação dos Métodos Variacionais

Existem diferentes procedimentos, baseados no Método dos Resíduos Ponderados para obter uma solução aproximada, nomeadamente o Método de Galerkin, o Método da Colocação e o Método dos Mínimos Quadrados. Estes procedimentos diferem no critério que preside a determinação dos coeficientes a_i da solução aproximada $\sum_{i=1}^n a_i f_i$ proposta. No entanto, todos eles determinam estes coeficientes por forma a que o resíduo seja nulo em média ponderada.

Dentro dos Métodos Variacionais os mais utilizados são os Métodos de Colocação, os Mínimos Quadrados e o Método de Galerkin Bathe (1982).

Com vista à apresentação destes métodos, considere-se um operador diferencial linear de segunda ordem L , definido num domínio Ω de fronteira Γ . De um modo geral, o problema traduzido por:

$$L[\Phi] = r \quad (4.1)$$

sujeito às condições de fronteira dadas por:

$$B[\Phi] = q \quad (4.2)$$

onde Φ designa a variável independente e r é uma função conhecida, não tem solução analítica conhecida. Propõe-se, então, uma solução aproximada:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (4.3)$$

onde os a_i são parâmetros desconhecidos a determinar e os f_i são funções tentativa, escolhidas por forma a que a solução satisfaça as condições de fronteira B .

O Método dos Resíduos Ponderados consiste em determinar os parâmetros a_i que minimizam o resíduo R dado por:

$$R = r - L\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i\right] \quad (4.4)$$

Observe-se que se $R = 0$ então $\tilde{\Phi} = \Phi$. O Método dos Resíduos Ponderados consiste em procurar a função tentativa que torna o resíduo ortogonal ao conjunto das funções teste. Os métodos de aproximação distinguem-se, precisamente, no critério que utilizam para calcular os a_i .

1. Na aproximação de Galerkin as funções teste são iguais às funções tentativa, sendo funções contínuas que satisfazem individualmente as condições de fronteira homogêneas essenciais. Neste método, os parâmetros a_i são determinados através de um sistema de equações algébricas dado por:

$$\int_{\Omega} f_i \left(r - L\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i\right] \right) d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Observe-se que se o operador L for simétrico semi-definido positivo, obtém-se uma matriz de coeficientes simétrica e definida positiva (definida por que engloba as condições de fronteira).

2. No método da colocação, as funções teste são funções de Dirac centradas em determinados pontos, designados por pontos de colocação, onde a equação diferencial deve ser satisfeita.

O resíduo R é anulado, para todos os n pontos do domínio da solução, x_j (nós de colocação) obtendo-se um sistema de n equações algébricas nos parâmetros a_i , dado por:

$$R(x_j) = 0 \quad (4.6)$$

$$r(x_j) - L(\tilde{\Phi}_n(x_j)) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^n (L f_i)(x_j) a_i = r(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

3. No método dos Mínimos Quadrados as funções tentativa têm de satisfazer as condições de fronteira. O método consiste em minimizar o integral do quadrado do resíduo, com respeito aos parâmetros a_i :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_{\Omega} \left(r - L \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right] \right)^2 d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

obtendo-se de (4.4) o sistema de n equações em a_i :

$$\int_{\Omega} \left(r - L \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right] \right) L[f_i] d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Este método conduz sempre a uma matriz simétrica independentemente das propriedades do operador L .

Dentro dos esquemas de MWR, o Método de Galerkin é dos mais utilizados uma vez que a classe das funções tentativa e teste coincidem, sendo apenas necessário construir uma base de funções e não duas.

4.1.3 Revisão da Literatura

A primeira aplicação de Métodos Variacionais às equações às derivadas parciais deu-se com a utilização do método de Galerkin tendo sido efectuada por Silberman (1954), na análise de problemas ligados à meteorologia.

O método de Galerkin desenvolveu-se no contexto das equações não lineares com Orszag (1969, 1970) e Eliassen et al. (1970) com a análise de transformadas integrais para o cálculo das convoluções que emergem das formas quadráticas não lineares.

O método da colocação, considerado um dos mais simples dentro da classe dos MWR, começou por ser utilizado por Slater (1934) e Kantorovich and Krylov (1958), tendo sido desenvolvido com Frazer and Jones (1937), como método geral de resolução de equações diferenciais ordinárias.

Lanczos (1938) focou a necessidade de haver uma escolha apropriada das funções tentativa e da distribuição dos pontos de colocação ser crucial para a precisão do método.

Mais tarde, Clenshaw and Norton (1963), Norton (1964) e Wright (1964) desenvolveram o método de colocação utilizando polinómios de Chebyshev para a obtenção de solução em problemas de valor inicial. Paralelamente, mas como forma de obter a solução

em problemas de condições de fronteira, foram efectuados estudos por Villadsen and Stewart (1967).

Recentemente, em relação a problemas periódicos espaciais, o mesmo método foi utilizado por Kreiss and Oliger (1973) e Orszag (1972), tendo este último atribuído ao método a designação de pseudospectral.

Em 1977 Gottlieb and Orszag (1977) resumiram numa monografia os elementos principais da Teoria dos Métodos Espectrais, teoria essa que tem vindo a ser alargada a uma gama mais vasta de problemas como sejam as equações com coeficientes variáveis ou as equações não lineares. Como consequência, desenvolveu-se, por um lado, a teoria referente às diferentes classes de funções tentativa e, por outro lado, a análise da estabilidade e convergência dos métodos.

Do ponto de vista teórico, a interpretação dos Métodos Variacionais como MWR tem tido bastante sucesso, uma vez que proporciona a utilização de técnicas de análise funcional, Mercier (1989).

Os estudos desenvolvidos na década de 80 podem ser encontrados em Voight et al. (1984) e Canut et al. (1987) constando essencialmente de aplicações à mecânica de fluidos. Jarraud and Baede (1985) e Haltiner and Williams (1980) referiram por seu turno aplicações no campo da meteorologia.

No presente trabalho, aplica-se uma formulação variacional (formulação baseada no MWR e designada por formulação fraca) às equações descritivas do problema de dupla difusão que ocorre na zona gradiente de um Lago Solar e utiliza-se o método de Galerkin como forma de obter as respectivas soluções aproximadas.

A escolha do método assenta no facto de se estar perante um domínio bastante regular, o que permite alguma liberdade na escolha das funções tentativa apresentadas para solução do sistema (5.25)-(5.27). Por outro lado o facto de não obrigar à verificação das condições de fronteira naturais torna esta formulação particularmente aliciante, uma vez que se torna possível considerar uma vasta gama de condições de fronteira.

4.2 Metodologia

4.2.1 Formulação fraca

Considere-se uma equação às derivadas descrita na forma:

$$Lu = f \tag{4.11}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \tag{4.12}$$

onde u e f são funções de x , com:

$$x \in \Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R} \tag{4.13}$$

e onde L designa um operador diferencial linear de segunda ordem. Observe-se que a escolha de $\Omega = [0, 1]$ como domínio não é restritiva uma vez que qualquer intervalo limitado se pode transformar neste intervalo mediante uma transformação de coordenadas. A unicidade da solução u é garantida pelas condições de fronteira impostas.

Seja \mathcal{U} a classe de funções tentativa u , isto é das funções para as quais o operador L faz sentido. De uma forma análoga seja \mathcal{V} a classe das funções v , funções teste. O problema dado pela equação (4.11) sujeito às condições de fronteira (4.12) é equivalente a determinar $u \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\int_{\Omega} (Lu) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4.14)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad (4.15)$$

A formulação inicial do problema dado por (4.11)-(4.12) é designada por formulação clássica enquanto que a formulação dada por (4.14)-(4.15), é designada por formulação fraca.

Observe-se que esta formulação é baseada no método dos resíduos ponderados, uma vez que consiste em obter uma solução aproximada de (4.11), tornando o resíduo, com \tilde{u} solução aproximada, dado por:

$$r = f - L\tilde{u} \quad (4.16)$$

"pequeno", obrigando-o a ser nulo em média, ou seja:

$$\int_{\Omega} (L\tilde{u}) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4.17)$$

Existência e Unicidade de solução

Introduzem-se de seguida alguns elementos de Análise Funcional necessários ao desenvolvimento deste Capítulo.

Definição 4.2.1 1. *Um espaço normado em que todas as sucessões de Cauchy sejam convergentes diz-se completo ou de Banach.*

2. *Um espaço munido de um produto interno e da respectiva norma associada que seja completo diz-se espaço de Hilbert.*

Definição 4.2.2 *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{G} espaços lineares reais. Uma aplicação T de \mathcal{E} em \mathcal{G} isto é $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ diz-se um operador linear se $\forall u \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathcal{G}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tem:*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v \quad (4.18)$$

Se $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ o operador T designa-se por funcional linear real.

Teorema 4.2.1 (Riesz) *Seja \mathcal{U} um espaço de Hilbert e F um funcional linear contínuo. Então existe um único elemento $f \in \mathcal{U}$ tal que:*

$$F(u) = (f, u) \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (4.19)$$

Este Teorema afirma que existe uma correspondência biunívoca entre elementos de um espaço de Hilbert e funcionais lineares contínuos sobre esse espaço.

Definição 4.2.3 *Se \mathcal{V} for um espaço de Hilbert define-se dual topológico \mathcal{V}' de \mathcal{V} como o espaço constituído por todos os funcionais lineares definidos em \mathcal{V} .*

Com vista ao estabelecimento do Teorema de existência e unicidade da solução da formulação fraca considerem-se as seguintes definições:

Definição 4.2.4 *Chama-se solução fraca de (4.11) a uma função $u \in \mathcal{U}$ que verifica a equação:*

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}' \quad (4.20)$$

com \mathcal{V}' dual topológico de \mathcal{V} .

Definição 4.2.5 *Uma forma bilinear $a : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:*

1. *contínua se existe uma constante $M > 0$ tal que:*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad (4.21)$$

2. *coerciva ou elíptica se existe $\alpha > 0$ tal que:*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (4.22)$$

A existência e unicidade da solução da formulação fraca do problema inicial dada por (4.14) o qual pode ser escrito na forma:

$$a(u, v) = (Lu, v) \quad (4.23)$$

$$L(u, v) = (f, v) \quad (4.24)$$

é garantida pelo Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 4.2.2 (Lax-Milgram) *Seja \mathcal{U}' o dual de \mathcal{U} e a uma forma bilinear contínua e coerciva em $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Então $\forall L \in \mathcal{U}'$, $\exists^1 u \in \mathcal{U}$:*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4.25)$$

Se $a(u, v)$ for contínua e coerciva então a formulação fraca tem solução única.

4.2.2 O Método de Galerkin

O Método de Galerkin tem por objectivo determinar soluções aproximadas de (4.11) utilizando o método dos resíduos ponderados através de uma escolha apropriada das funções tentativa e das funções teste, em subespaços $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$, de dimensão n .

Seja $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ uma base do espaço de Hilbert separável ¹ \mathcal{U} e \mathcal{U}_n o espaço das funções tentativa gerado pelas funções φ_i , $i = 1, \dots, n$, linearmente independentes, do tipo:

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (4.26)$$

¹Um espaço topológico X diz-se separável se dados dois elementos x e y desse espaço existem vizinhanças $V(x)$ e $W(y)$ tais que $V \cap W = \emptyset$.

onde os a_i são parâmetros a determinar e as funções φ_i satisfazem as condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Então:

$$Lu_n = \sum_{i=1}^n (L\varphi_i) c_i \quad (4.27)$$

Considerando o espaço das funções teste \mathcal{V}_n gerado pelas funções $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ linearmente independentes, aplicando (4.14) a (4.11) e pondo $v = \psi_j$ vem:

$$\sum_{i=1}^n [(L\varphi_i), \psi_j] c_i = (f, \psi_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

Pondo

$$a_{ij} = [(L\varphi_i), \psi_j] \quad (4.29)$$

$$f_j = (f, \psi_j) \quad (4.30)$$

a determinação da solução aproximada u_n passa a ser dada pela solução de um sistema de equações algébricas de dimensão n , cuja matriz é dada pelos a_{ij} e o termo independente pelos f_j , vindo:

$$\mathbf{A}c = f$$

Neste método, se o operador L for simétrico e definido positivo ² a matriz \mathbf{A} é simétrica definida positiva ³.

Convergência do Método de Galerkin

Para obter o resultado que garante a convergência do método torna-se necessário introduzir algumas definições sobre normas e referir alguns teoremas de equivalência entre as mesmas.

Definição 4.2.6 *As normas*

$$\|u\|_p = \left[\int_b^a u(x)^p dx \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty \quad (4.31)$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad p = \infty \quad (4.32)$$

designam-se por normas L^p .

Definição 4.2.7 *Os espaços lineares de sucessões $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ em C tais que $\|u\|_p < \infty$ dizem-se espaços l^p .*

²O operador L diz-se:

1. simétrico se $\int_\Omega L(\phi)\psi d\Omega = \int_\Omega L(\psi)\phi d\Omega, \quad \forall \psi, \phi;$
2. definido positivo se $\int_\Omega (L(\phi)\phi) d\Omega > 0, \quad \forall \phi.$

onde Ω designa o domínio e ϕ e ψ são funções que satisfazem as condições de fronteira homogêneas essenciais

³Observe-se que os métodos dos Mínimos Quadrados e de Galerkin podem conduzir a matrizes simétricas, independentemente das propriedades do operador L , ao contrário do método de Colocação, o qual em geral não dá origem a matrizes simétricas.

Definição 4.2.8 Designam-se por espaços de Sobolev de ordem m , com m inteiro não negativo, e denotam-se por $H^m(\Omega)$ os conjuntos da forma:

$$H^m(\Omega) = \{u : D^k u \in L^2(\Omega), k = 0, \dots, m\} \quad (4.33)$$

Define-se ainda:

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : D^k u(\partial\Omega) = 0, k = 0, \dots, m-1\} \quad (4.34)$$

Teorema 4.2.3 (Desigualdade de Friedrichs) Para $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se:

$$\|u\|_0^2 \leq C \|u'\|_0^2 \quad (4.35)$$

com C constante.

Teorema 4.2.4 A forma bilinear $a : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathcal{U} = \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ dada por

$$a(u, v) = \int_0^1 (ku'v' + bu'v + cuv) dx \quad (4.36)$$

em onde $k = k(x)$, $b = b(x)$ e $c = c(x)$ são funções providas da regularidade necessária, é simétrica, limitada, contínua e elíptica.

Pelo teorema de Lax-Milgram tem-se:

Teorema 4.2.5 Se $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ for uma forma bilinear simétrica e elíptica então existe $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_1 \leq C \|f\|_0 \quad (4.37)$$

e a solução do problema $a(u, v) = (f, v)$, $\forall v \in \mathcal{V}$ se existir, é única.

Obtém-se finalmente o resultado que garante que o erro na norma $\|\cdot\|_1$ é quase optimal.

Teorema 4.2.6 Seja $u_n \in \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ uma solução aproximada verificando

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n) \quad \forall v_n \in \mathcal{V}_n \quad (4.38)$$

O erro cometido $e_n = u - u_n$ é ortogonal ao subespaço \mathcal{V}_n , $\forall w \in \mathcal{V}_n$ e tem-se que:

$$\|e_n\|_1 \leq K \|u - w\|_1 \leq K \inf_{w \in \mathcal{V}_n} \|u - w\|_1 \quad (4.39)$$

com K constante.

Na sequência do Teorema 4.2.4, no qual são estabelecidas as propriedades da forma bilinear a , facilmente se verifica que esta goza de propriedades análogas às de um produto interno. Assim:

1. Por ser limitada, a forma bilinear a obedece à inequação:

$$a(u, v) \leq M \|u\|_1 \|v\|_1 \quad (4.40)$$

2. A relação que confere a propriedade de elipticidade à forma bilinear é dada por:

$$a(v, v) \geq C \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad C > 0 \quad (4.41)$$

Destas duas relações obtém-se a desigualdade ente normas :

$$C \|v\|_1^2 \leq a(v, v) \leq M \|v\|_1^2 \quad (4.42)$$

a qual prova a equivalência entre as normas $a(v, v)^{1/2}$ e $\|v\|_1$.

Quando esta equivalência se verifica, a norma $a(v, v)^{1/2}$ é designada por norma de energia, $\|v\|_E$, uma vez que em determinadas aplicações pode identificar-se com a energia do sistema em estudo.

4.2.3 Escolha dos subespaços de funções base

Tanto a escolha das funções tentativa como a escolha das funções teste é de fulcral importância para o êxito do método considerado. Estas devem ser suficientemente regulares por forma a que as operações de derivação e integração tenham sentido.

O subespaço das soluções aproximadas, \mathcal{V}_n deve possuir uma base com as seguintes propriedades:

1. os coeficientes $a(\varphi_j, \varphi_i)$ e $L(\varphi_i)$ do sistema linear de equações algébricas devem ser fáceis de calcular;
2. o sistema obtido deve conduzir a matrizes invertíveis e bem condicionadas, por forma a não levantarem dificuldades numéricas;
3. as funções tentativa devem satisfazer as condições de fronteira homogêneas.

A escolha do número de funções tentativa é ditada pela necessidade de representar convenientemente a física do fenómeno em análise. No entanto, devido ao custo computacional implícito, interessa que o número de funções teste utilizadas seja pequeno, isto é, é importante obter boas aproximações com um número de parâmetros relativamente pequeno.

4.2.4 Formulação fraca simétrica

Com vista à obtenção da formulação fraca do problema (4.11) considere-se este na forma:

$$a(u, v) = (f, v) \quad (4.43)$$

onde a forma bilinear é dada por

$$a(u, v) = \int_0^1 [(ku')'v + cuv]dx \quad (4.44)$$

Integrando por partes a primeira parcela da função integranda obtém-se:

$$\int_0^1 -(ku')'vdx = \int_0^1 (ku'v')dx - [ku'v]_0^1 \quad (4.45)$$

Substituindo este resultado em (4.43) tem-se:

$$\int_0^1 [-ku'v' + cuv]dx = \int_0^1 fvdx - k(1)u'(1)v(1) + k(0)u'(0)v(0) \quad (4.46)$$

Se as as funções teste satisfizerem as condições de fronteira de Dirichlet homogêneas vem:

$$\int_0^1 (ku')'vdx = - \int_0^1 (ku'v')dx \quad (4.47)$$

e o problema inicial é substituído por:

$$\int_0^1 [-ku'v' + cuv]dx = \int_0^1 (fv)dx \quad (4.48)$$

onde u e v figuram com derivadas de igual ordem e em posições simétricas, tendo passado a derivada de maior ordem de dois para um. Desta forma, a classe de soluções possíveis é alargada, sendo aceitáveis dados menos regulares.

Tendo por objectivo a análise das classes de funções tentativa e teste, considerem-se as funções k e c limitadas em $\bar{\Omega}$:

$$\|k\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |k(x)| < \infty \quad (4.49)$$

$$\|c\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |c(x)| < \infty \quad (4.50)$$

Teorema 4.2.7 (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q índices tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então é válida a relação para $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$ e $\int_a^b |y(t)|^q dt < \infty$, dada por:*

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q \quad (4.51)$$

Aplicando esta desigualdade a $\int_0^1 ku'v'dx$ tem-se:

$$\left| \int_0^1 ku'v'dx \right| \leq \|k\|_{\infty} \|u'\|_0 \|v'\|_0 \quad (4.52)$$

Este resultado garante que o integral existe e é bem definido se u' e v' forem de quadrado integrável. Aplicando a desigualdade de Hölder a $\int_0^1 cuvdx$ e a $\int_0^1 fvdv$ obtém-se respectivamente:

$$\left| \int_0^1 cuvdx \right| \leq \|c\|_{\infty} \|u\|_0 \|v\|_0 \quad (4.53)$$

$$\left| \int_0^1 fvdv \right| \leq \|c\|_{\infty} \|f\|_0 \|v\|_0 \quad (4.54)$$

o que implica que $u, v \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

As funções tentativa e teste devem pertencer a classes de funções idênticas, por exemplo $\mathcal{U} = \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, passando a formulação fraca a consistir em determinar $u \in \mathcal{U} = H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_0^1 (ku'v' + cuv) dx = \int_0^1 (fv) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.55)$$

Como

$$a(u, v) = a(v, u) \quad (4.56)$$

a formulação fraca simétrica consiste em determinar $u \in \mathcal{U}$ tal que:

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4.57)$$

A formulação fraca pode ser enunciada de outra forma. Assim, considerando o funcional $F : \mathcal{U} \rightarrow R$, definido por $F(v) = \int_0^1 (fv) dx$, a formulação fraca simétrica passa a consistir em determinar $u_n \in \mathcal{U}_n$ tal que:

$$a(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in \mathcal{V}_n \quad (4.58)$$

Se $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n$ e φ_i for uma base de ambos os subespaços pode-se tirar partido desta formulação para discretizar o problema inicial conduzindo a expressão (4.44) ao sistema de equações algébricas lineares dado por:

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 (ku'v' + cuv) dx \quad (4.59)$$

$$f_j = F(\varphi_j) = \int_0^1 f\varphi_j dx \quad (4.60)$$

obtendo-se:

$$\mathbf{A}c = f$$

com \mathbf{A} matriz simétrica definida positiva o que implica que é invertível e por conseguinte o sistema associado possui solução única.

4.2.5 Condições de fronteira

Retome-se o problema dado por (4.55) considerando agora $\mathcal{U} = \mathcal{V} = H^1(\Omega)$, com o objectivo de determinar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (4.61)$$

Integrando por partes o primeiro termo do membro esquerdo de (4.55) tem-se:

$$\int_0^1 ku'v'dx = k[u'v]_0^1 - k \int_0^1 u''v dx \quad (4.62)$$

resultando (4.61) na forma equivalente:

$$\int_0^1 [-(ku')' + cu - f]v dx + [ku'v]_0^1 = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.63)$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é subespaço linear de $H^1(\Omega)$ vem:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.64)$$

donde

$$\int_0^1 (ku'v' + cuv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.65)$$

A integração por partes do primeiro membro, juntamente com a definição de H_0^1 , conduz ao resultado:

$$-(ku')' + cu - f = 0 \quad (4.66)$$

uma vez que $v \in H_0^1$. Esta relação implica que a primeira parcela de (4.63) seja nula, restando:

$$[ku'v]_0^1 = k(1)u'(1)v(1) - k(0)u'(0)v(0), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.67)$$

equação que só é verdadeira se

$$u'(1) = 0, u'(0) = 0 \quad (4.68)$$

De acordo com o exposto, a alteração do espaço de funções teste e tentativa, (neste caso de $H_0^1(\Omega)$ para $H^1(\Omega)$) fez alterar o tipo de condições de fronteira. A função u , solução do problema (4.61) satisfaz agora, de uma forma natural, as condições de Neumann homogêneas.

Estas condições de fronteira dizem-se naturais enquanto que as condições de fronteira dadas por $u(0) = u_0$ e $u(1) = u_1$ se designam por condições de fronteira essenciais. Esta designação deve-se ao facto destas condições terem que ser explicitamente impostas.

No caso da forma bilinear envolver derivadas de quarta ordem, em vez de uma integração por partes há a necessidade de se efectuarem duas integrações por partes. Uma destas integrações conduz a uma condição do tipo (4.67) onde as derivadas de primeira ordem vêm substituídas por derivadas de segunda ordem. Resulta, pois, que nas equações de quarta ordem as condições de fronteira a partir de segunda ordem são condições naturais enquanto que as condições de fronteira de ordem menor ou igual a um têm que ser verificadas (condições essenciais).

4.3 Problema de Rayleigh-Bénard a duas componentes

Esta secção tem por objectivo aplicar a metodologia apresentada ao sistema de equações diferenciais não lineares (2.101)-(2.103) deduzidas no Capítulo 2, descritivo do processo de dupla difusão que ocorre na zona gradiente de um Lago Solar. Considerando que não existe geração interna de calor e que os coeficientes de difusão térmica e molecular são constantes, aquele sistema assume, após adimensionalização, a forma simplificada:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) T = J(\psi, T) \quad (4.69)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2\right) S = J(\psi, S) \quad (4.70)$$

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 \psi = -R_T \frac{\partial T}{\partial x} + R_S \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{Pr} J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (4.71)$$

As variáveis T , S e ψ dependem de x, z e t , sendo a variação espacial definida no domínio rectangular Ω , de fronteira Γ , dado por:

$$\Omega = [0, \lambda] \times [0, d] \quad (4.72)$$

4.3.1 Formulação fraca

Os operadores relativos às equações de conservação da energia, da conservação das espécies e da conservação da quantidade de movimento são dados respectivamente por:

$$L_1(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) (\cdot) - J(\psi, \cdot), \quad f_1 = 0 \quad (4.73)$$

$$L_2(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2 \right) (\cdot) - J(\psi, \cdot), \quad f_2 = 0 \quad (4.74)$$

$$L_3(\cdot) = \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2(\cdot) - J(\cdot, \nabla^2 \cdot) \quad f_3 = -R_T \frac{\partial T}{\partial x} + R_S \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.75)$$

designando as funções f_i os termos independentes de cada uma das equações. No presente trabalho, considera-se que as variáveis T , S e ψ são aproximadas por combinações lineares do tipo:

$$T(x, z, t) \sim T_{n_1}(x, z, t) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t) \varphi_i(x, z) \quad (4.76)$$

$$S(x, z, t) \sim S_{n_2}(x, z, t) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i(t) \xi_i(x, z) \quad (4.77)$$

$$\psi(x, z, t) \sim \psi_{n_3}(x, z, t) = \sum_{i=1}^{n_3} c_i(t) \varpi_i(x, z) \quad (4.78)$$

onde os φ_i , ξ_i e ϖ_i são funções linearmente independentes. As funções φ_i geram o subespaço U_{n_1} das funções tentativa para as quais o operador L_1 faz sentido, as funções ξ_i e ϖ_i geram, respectivamente, os subespaços de funções tentativa dados por U_{n_2} e U_{n_3} .

Os resíduos do sistema de equações (4.69)-(4.71) vêm dados por:

$$r_1 = L_1 T_{n_1} - f_1 = L_1 \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i \varphi_i \right) \quad (4.79)$$

$$r_2 = L_2 S_{n_2} - f_2 = L_2 \left(\sum_{i=1}^{n_2} b_i \xi_i \right) \quad (4.80)$$

$$r_3 = L_3 \psi_{n_3} - f_3 = L_3 \left(\sum_{i=1}^{n_3} c_i \varpi_i \right) \quad (4.81)$$

Os parâmetros a_i , b_i e c_i obtêm-se minimizando os resíduos, r_1 , r_2 e r_3 , obrigando os mesmos a serem ortogonais a cada uma das funções tentativa, geradoras dos subespaços U_{n_i} , $i = 1, 2, 3$. Vem pois:

$$\int_{\Omega} r_1 \varphi \, dx \, dz = 0, \quad \forall \varphi \in U_{n_1} \quad (4.82)$$

$$\int_{\Omega} r_2 \xi \, dx \, dz = 0, \quad \forall \xi \in U_{n_2} \quad (4.83)$$

$$\int_{\Omega} r_3 \varpi \, dx \, dz = 0, \quad \forall \varpi \in U_{n_3} \quad (4.84)$$

Como as funções φ_i , ξ_i e ϖ_i constituem bases de, respectivamente, U_{n_1} , U_{n_2} e de U_{n_3} o sistema de equações (4.82)-(4.84) é equivalente ao sistema:

$$\int_{\Omega} r_1 \varphi_j dx dz = 0, \quad j = 1, \dots, n_1 \quad (4.85)$$

$$\int_{\Omega} r_2 \xi_j dx dz = 0, \quad j = 1, \dots, n_2 \quad (4.86)$$

$$\int_{\Omega} r_3 \varpi_j dx dz = 0, \quad j = 1, \dots, n_3 \quad (4.87)$$

Atendendo às definições dos resíduos r_1, r_2 e r_3 , dadas pelas relações (4.79)-(4.81) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \int_{\Omega} L_1(a_i \varphi_i) \varphi_j dx dz = \int_{\Omega} f_1 \varphi_j dx dz, \quad j = 1, \dots, n_1 \quad (4.88)$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} \int_{\Omega} L_2(b_i \xi_i) \xi_j dx dz = \int_{\Omega} f_2 \xi_j dx dz, \quad j = 1, \dots, n_2 \quad (4.89)$$

$$\sum_{i=1}^{n_3} \int_{\Omega} L_3(c_i \varpi_i) \varpi_j dx dz = \int_{\Omega} f_3 \varpi_j dx dz, \quad j = 1, \dots, n_3 \quad (4.90)$$

Uma vez estabelecida a formulação fraca para o sistema de equações (4.69)-(4.71), as equações de conservação podem ser particularizadas, de acordo com as definições dadas para os operadores L_1, L_2 e L_3 .

Apresenta-se de seguida a nova forma do sistema original (2.101)-(2.103) utilizando as relações dadas por (4.88)-(4.90).

Equação de Conservação da Energia

Substituindo L_1 pela respectiva expressão e atendendo a que $f_1 = 0$, a equação de conservação da energia vem dada por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{n_1}}{\partial t} - \nabla^2 T_{n_1} - J(\psi_{n_3}, T_{n_1}) \right) \varphi_j d\Omega = 0 \quad (4.91)$$

ou, de uma forma equivalente, por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{n_1}}{\partial t} \varphi_j d\Omega \right) - \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, T_{n_1}) \varphi_j d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla^2 T_{n_1}) \varphi_j d\Omega = 0 \quad (4.92)$$

Integrando por partes o último termo, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 T_{n_1}) \varphi_j d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\nabla T_{n_1}) \varphi_j d\Omega \quad (4.93)$$

$$= \int_{\Gamma} (\nabla T_{n_1} \cdot \vec{n}) \varphi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla T_{n_1} \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \quad (4.94)$$

A equação da temperatura obtida através da formulação fraca vem pois substituída por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{n_1}}{\partial t} \varphi_j d\Omega \right) - \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, T_{n_1}) \varphi_j d\Omega - \int_{\Gamma} (\nabla T_{n_1} \cdot \vec{n}) \varphi_j d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla T_{n_1} \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = 0 \quad (4.95)$$

Equação de Conservação do Sal

Na equação da conservação do sal o termo independente é zero, vindo $f_2 = 0$. Tem-se a partir da definição de L_2 , (4.74):

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{n_2}}{\partial t} - \tau \nabla^2 S_{n_2} - J(\psi_{n_3}, S_{n_2}) \right) \xi_j d\Omega = 0 \quad (4.96)$$

isto é :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{n_2}}{\partial t} \xi_j d\Omega \right) - \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, S_{n_2}) \varphi_j d\Omega - \int_{\Omega} (\tau \nabla^2 S_{n_2}) \xi_j d\Omega = 0 \quad (4.97)$$

Efectuando a integração por partes do último termo e introduzindo o resultado em (4.96) vem:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{n_2}}{\partial t} \xi_j d\Omega \right) - \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, S_{n_2}) \xi_j d\Omega - \tau \int_{\Gamma} (\nabla S_{n_2} \cdot \vec{n}) \xi_j d\Gamma + \tau \int_{\Omega} \nabla S_{n_2} \cdot \nabla \xi_j d\Omega = 0 \quad (4.98)$$

Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Utilizando um procedimento idêntico aos anteriores e atendendo às expressões do operador L_3 e do termo independente f_3 , a equação de conservação da quantidade de movimento vem dada por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial(\nabla^2 \psi_{n_3})}{\partial t} - \nabla^4 \psi_{n_3} - \frac{1}{Pr} J(\psi_{n_3}, \nabla^2 \psi_{n_3}) \right) \varpi_j d\Omega = \int_{\Omega} \left(-R_T \frac{\partial T_{n_1}}{\partial x} + R_S \frac{\partial S_{n_2}}{\partial x} \right) \varpi_j d\Omega \quad (4.99)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial(\nabla^2 \psi_{n_3})}{\partial t} \right) \varpi_j d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Pr} J(\psi_{n_3}, \nabla^2 \psi_{n_3}) \right) \varpi_j d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left(R_T \frac{\partial T_{n_1}}{\partial x} \right) \varpi_j d\Omega - \int_{\Omega} \left(R_S \frac{\partial S_{n_2}}{\partial x} \right) \varpi_j d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla^4 \psi_{n_3}) \varpi_j d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

Nesta equação é necessário aplicar a integrações por partes a dois termos: ao termo de segunda ordem e ao de quarta ordem.

A dupla integração por partes no termo de quarta ordem é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^4 \psi_{n_3} \cdot \varpi_j d\Omega &= \\ &= \int_{\Omega} \nabla (\nabla^3 \psi_{n_3}) \varpi_j d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\nabla^3 \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla^3 \psi_{n_3} \nabla \varpi_j d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\nabla^3 \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla (\Delta \psi_{n_3}) \nabla \varpi_j d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\nabla^3 \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j d\Gamma - \left(\int_{\Gamma} \Delta \psi_{n_3} \cdot \nabla \varpi_j \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta \psi_{n_3} \Delta \varpi_j d\Omega \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

conduzindo a:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla^4 \psi_{n_3} \varpi_j d\Omega &= & (4.102) \\
&= \int_{\Gamma} (\nabla^3 \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \Delta \psi_{n_3} \frac{d}{dn} \varpi_j d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta \psi_{n_3} \Delta \varpi_j d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \nabla (\Delta \psi_{n_3}) \varpi_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \Delta \psi_{n_3} \cdot \frac{d}{dn} \varpi_j d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta \psi_{n_3} \Delta \varpi_j d\Omega
\end{aligned}$$

Integrando por partes o termo de segunda ordem obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_{n_3}) \right) \varpi_j d\Omega &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \nabla (\nabla \psi_{n_3}) \varpi_j d\Omega & (4.103) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma} (\nabla \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j d\Gamma - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \nabla \psi_{n_3} \nabla \varpi_j d\Omega
\end{aligned}$$

A formulação fraca da equação da quantidade de movimento vem, finalmente, dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Pr} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \psi_{n_3} \cdot \nabla \varpi_j) d\Omega + \frac{1}{Pr} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} ((\nabla \psi_{n_3} \cdot \vec{n}) \varpi_j) d\Gamma - \\
\int_{\Omega} \Delta \psi_{n_3} \Delta \varpi_j d\Omega - \int_{\Gamma} \nabla (\Delta \psi_{n_3}) \varpi_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla \psi_{n_3} \frac{d}{dn} \varpi_j d\Gamma - \\
\frac{1}{Pr} \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, \nabla^2 \psi_{n_3}) \varpi_j d\Omega \\
= - \int_{\Omega} \left(R_T \frac{\partial T_{n_1}}{\partial x} - R_S \frac{\partial S_{n_2}}{\partial x} \right) \varpi_j d\Omega & (4.104)
\end{aligned}$$

Observe-se que a integração por partes efectuada permitiu redistribuir o grau das derivadas nas equações. Nas equações de conservação da energia e das espécies passaram a figurar apenas derivadas de primeira ordem enquanto que na equação da quantidade de movimento, a maior derivada passou a ser de ordem dois e não quatro, como inicialmente.

4.3.2 Formulação fraca simétrica

Considere-se o sistema de equações (4.95) que traduz a formulação fraca da equação da temperatura. Se as funções teste φ_i satisfizerem as condições de fronteira de Dirichlet:

$$\varphi_j(\Gamma) = 0 \quad (4.105)$$

a formulação fraca da equação da conservação da energia, vem substituída por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial T_{n_1}}{\partial t} \varphi_j d\Omega \right) - \int_{\Omega} J(\psi_{n_3}, T_{n_1}) \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \nabla T_{n_1} \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = 0 \quad (4.106)$$

Nesta expressão T_{n_1} e φ_j aparecem com derivadas de ordem igual em posições simétricas. O facto da ordem da derivada ter diminuído relativamente à equação inicial, proporciona maior possibilidade de escolha para a classe de soluções possíveis.

Se o conjunto de funções tentativa T_{n_1} coincidir com o conjunto de funções teste φ_j tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial t} \varphi_j d\Omega - \int_{\Omega} J((c_i \varpi_i), (a_i \varphi_i)) \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(a_i \varphi_i) \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = 0 \quad (4.107)$$

e pondo:

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla(a_i \varphi_i) \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \quad (4.108)$$

$$f_j = (f, \varphi_j) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial t} - J((c_i \varpi_i), \varphi_i) \right) \varphi_j d\Omega \quad (4.109)$$

obtém-se em notação matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{a}} - \mathbf{N}(c)\mathbf{a} \quad (4.110)$$

ou de uma forma equivalente:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{N}(c)\mathbf{a} \quad (4.111)$$

onde $\mathbf{N}(c)$ é a matriz que resulta da integração do termo convectivo sendo os seus termos função dos coeficientes c_i da função de corrente, designados no seu conjunto por c .

Se a matriz \mathbf{M} for invertível tem-se:

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{N}(c))\mathbf{a} \quad (4.112)$$

ou ainda de uma forma simplificada:

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{L}(c)\mathbf{a}, \quad \mathbf{L}(c) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{N}(c)) \quad (4.113)$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ designa o vector dos coeficientes a_i , $\dot{\mathbf{a}} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots, \dot{a}_{n_1})$ o vector das derivadas dos coeficientes a_i , em ordem ao tempo e \mathbf{A} , \mathbf{M} , \mathbf{N} e \mathbf{L} são matrizes, cuja ordem n_1 é ditada pelo número de funções tentativa empregue. Em particular, \mathbf{A} é uma matriz simétrica definida positiva.

As equações de conservação das espécies e da conservação da quantidade de movimento conduzem de forma análoga a sistemas algébricos de equações não lineares. Seguindo o mesmo tipo de raciocínio facilmente se conclui que as equações matriciais associadas à equação de conservação do sal e à equação de conservação da quantidade de movimento vêm dadas na forma simplificada, respectivamente, por:

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{L}_1(c)\mathbf{b} \quad (4.114)$$

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{L}_2(c)\mathbf{c} + \mathbf{M}_1\mathbf{a} + \mathbf{M}_2\mathbf{b} \quad (4.115)$$

onde os vectores \mathbf{b} , $\dot{\mathbf{b}}$, \mathbf{c} e as matrizes \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 possuem significados idênticos para a equação de conservação do sal e para a equação de conservação da quantidade de movimento, aos referidos para a equação de conservação da energia. O sistema de equações diferenciais algébricas obtido será, pois, da forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{L}(c)\mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{L}_1(c)\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{L}_2(c)\mathbf{c} + \mathbf{M}_1\mathbf{a} + \mathbf{M}_2\mathbf{b} \end{cases} \quad (4.116)$$

onde o número de equações está relacionado com a ordem das matrizes envolvidas e logo com o número de funções tentativa empregue para cada uma das variáveis, T , S e ψ .

4.3.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira consideradas, que complementam o sistema de equações dado por (4.69)-(4.71) são idênticas às condições de fronteira impostas por Costa et al. (1981), apresentadas no Capítulo 3.

Condições de fronteira para a Temperatura e Salinidade As condições de fronteira para a temperatura e para a salinidade traduzem o facto da zona gradiente ser analisada como um reservatório fechado, compreendido entre dois planos $z = 0$ e $z = d$, sendo dadas por:

$$T|_{z=d} = 0, \quad T|_{z=0} = 0 \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=\lambda} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0 \quad (4.118)$$

$$S|_{z=d} = 0, \quad S|_{z=0} = 0 \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}|_{x=\lambda} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}|_{x=0} = 0 \quad (4.120)$$

Condições de fronteira para a Velocidade As condições de fronteira para a velocidade traduzem o facto de se considerarem fronteiras livres, vindo dadas por:

$$\psi|_{z=d} = 0, \quad \psi|_{z=0} = 0 \quad (4.121)$$

$$\psi|_{x=\lambda} = 0, \quad \psi|_{x=0} = 0 \quad (4.122)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}|_{z=d} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}|_{z=0} = 0 \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}|_{x=\lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}|_{x=0} = 0 \quad (4.124)$$

4.3.4 Critério de escolha dos espaços de funções teste e tentativa

Como já se referiu o critério geral que preside à escolha do número de funções tentativa e teste para cada uma das equações do sistema assenta na necessidade de representar suficientemente bem a física do problema sem aumentar desnecessariamente o custo computacional.

No presente caso e de uma forma mais detalhada o critério que preside á escolha destas funções é o seguinte:

1. Para a temperatura e para a salinidade a escolha deve ser feita por forma a:
 - (a) satisfazer as condições de fronteira essenciais, dadas por (4.117), (4.119);
 - (b) satisfazer a periodicidade em x e em z , inerente à formação de células de convecção;

(c) a reter sómente os termos até ao segundo grau em z .

As condições de fronteira (4.118) e (4.120) são naturais, não necessitando de ser satisfeitas a priori.

Observe-se que o facto de se admitir periodicidade em x vem na linha da análise de autores como Chandrasekhar (1961), Veronis (1968), Turner (1974) e Costa et al. (1981). Estes autores referiram o comportamento dos campos temperatura e salinidade como sendo periódicos nas direcções x e z ocasionando a formação de células de convecção.

2. Para ψ as funções propostas verificam as condições de fronteira essenciais dadas por (4.121) e (4.122). As restantes condições são naturais, logo não necessitam de ser satisfeitas (equações (4.123), (4.124)).

As funções adoptadas por Costa et al. (1981) dadas por:

$$T_2 = a_1(t)\varphi_1(x, z) + a_2(t)\varphi_2(x, z) \quad (4.125)$$

$$S_2 = b_1(t)\xi_1(x, z) + b_2(t)\xi_2(x, z) \quad (4.126)$$

$$\psi_1 = c_1(t)\varpi_1(x, z) \quad (4.127)$$

com

$$\varphi_1(x, z) = \xi_1(x, z) = 2 \left(\frac{2}{p} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi z) \quad (4.128)$$

$$\varphi_2(x, z) = \xi_2(x, z) = -\frac{1}{\pi} \sin(2\pi z) \quad (4.129)$$

$$\varpi_1(x, z) = 2(2p)^{1/2} \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi z) \quad (4.130)$$

estão de acordo com o critério de escolha referido.

Conclusão

Refira-se, a finalizar, que as funções tentativa dadas pelas equações (4.125)-(4.127) são apenas exemplo de um conjunto de funções tentativa possíveis, que verificam as condições de fronteira essenciais.

No Capítulo 5, a adopção de diferentes conjuntos de condições de fronteira condicionará o conjunto de funções tentativa escolhido.

No Capítulo 6, cujo objectivo consiste na simulação do Lago, onde é necessário utilizar métodos de integração numérica, para resolver o sistema de equações diferenciais nas variáveis $a_i(t)$, $b_i(t)$ e $c_i(t)$ utiliza-se um conjunto de funções tentativa diferente do utilizado no Capítulo 5. A escolha destas funções está como se verá condicionada até certo ponto, pela integração numérica. Se por um lado interessa empregar um número de funções tentativa superior ao utilizado no Capítulo 5, por outro lado as mesmas devem conduzir a matrizes esparsas e bem condicionadas. Este bom condicionamento está na base da invertibilidade do sistema em $a_i(t)$, $b_i(t)$ e $c_i(t)$, exigida por alguns métodos de integração numérica (como se verá mais em pormenor no Capítulo 6).

Capítulo 5

Estabilidade de Lagos Solares

O estudo da estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar consiste na análise da evolução de pequenas perturbações sobrepostas aos estados estacionários da temperatura, salinidade e velocidade.

No Capítulo 3 apresentou-se o estudo clássico de estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard, seguindo a Teoria Linear das pequenas perturbações. A análise desenvolvida considera perfis de temperatura e salinidade lineares, situação que não corresponde à que ocorre na zona gradiente de um Lago Solar. Na realidade os perfis de temperatura e de salinidade nesta zona não são lineares, sendo esta não linearidade bem evidenciada nos gráficos traçados a partir de dados experimentais recolhidos no Lago Solar de Pégões, Joyce (1992), como se viu no Capítulo 1.

O presente capítulo tem como objectivo analisar o comportamento da zona gradiente de um Lago Solar quando submetida aos seguintes tipos de influências:

- Caso 1- absorção de radiação solar;
- Caso 2- variação dos coeficientes de difusão térmica e salina;
- Caso 3- combinação do Caso 1 e do Caso 2.

A consideração destas diferentes influências conduz à formulação de três versões do modelo físico-matemático descritivo da zona gradiente, a partir dos quais se efectua a análise de estabilidade. Para simplificação de leitura, a análise de cada uma das três influências será referida como Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

5.1 Introdução

Para a análise da zona gradiente do Lago Solar adopta-se uma configuração bidimensional, esquematizada na Figura 5.1, dependendo as variáveis temperatura, salinidade e velocidade das coordenadas espaciais x e z e do tempo t .

Como se referiu no Capítulo 2, a modelação da camada de fluido que constitui a zona gradiente baseia-se na aproximação de Boussinesq das equações de Navier-Stokes. De acordo com esta aproximação, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares:

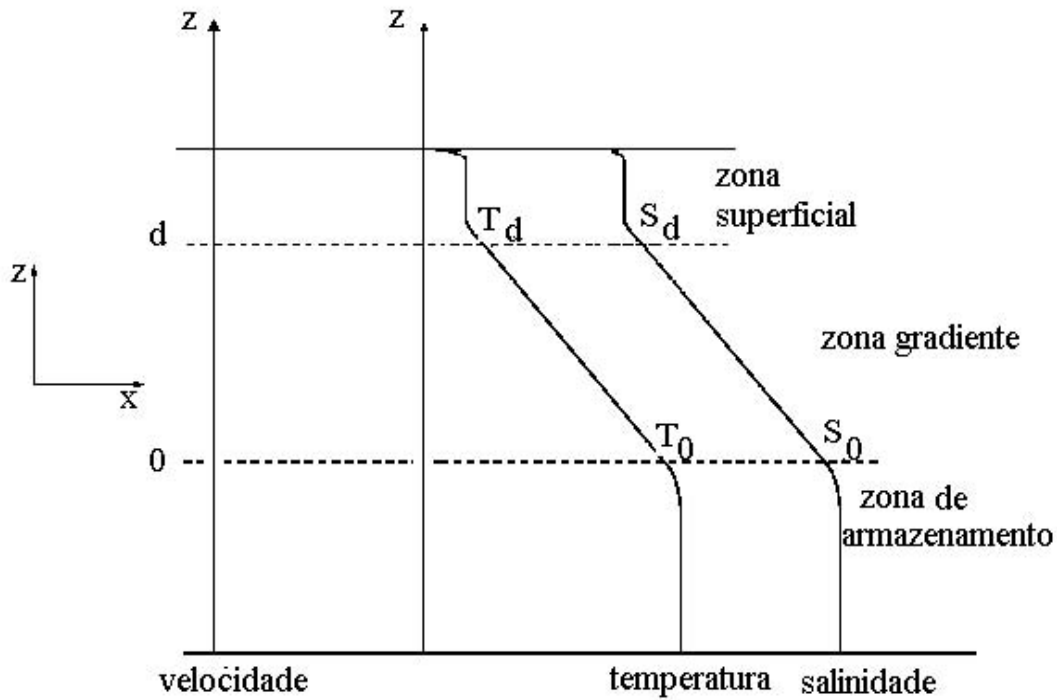


Figura 5.1: Esquema da zona gradiente

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla P + g(\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (K_T \nabla T) + \frac{\dot{q}}{\rho_m C_p} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (K_S \nabla S) \quad (5.4)$$

$$\rho_m - \rho = \rho(\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \quad (5.5)$$

O procedimento que serve de base à análise da zona gradiente desenvolve-se da seguinte forma:

1. A partir do sistema de equações (5.1)-(5.5) e das condições de fronteira impostas determinam-se as soluções estacionárias T_s , S_s e \mathbf{v}_s das variáveis temperatura, salinidade e velocidade;
2. Sobrepõem-se funções de perturbação \tilde{T} , \tilde{S} e $\tilde{\mathbf{v}}$ às soluções estacionárias das variáveis T , S e \mathbf{v} , as quais traduzem variações às funções temperatura, salinidade e velocidade em torno dos respectivos estados estacionários.
3. As soluções de aproximação, constituídas pela soma das soluções estacionárias com as funções de perturbação propostas, são introduzidas no sistema (5.1)-(5.5), após

este ter sido adequadamente adimensionalizado. O sistema resultante passa a ter, como variáveis, as funções \tilde{T} , \tilde{S} e $\tilde{\mathbf{v}}$ e a incorporar quantidades adimensionais como os números de Rayleigh térmico e salino, característicos do fenómeno em estudo;

4. Aplica-se a formulação fraca ao sistema de equações adimensionalizado obtendo-se um sistema de equações diferenciais ordinárias. A introdução desta formulação permite, como se mostrou no Capítulo 4, eliminar a dependência espacial das variáveis, conduzindo a um sistema de equações diferenciais ordinárias dependente do tempo;
5. A partir deste sistema determinam-se os estados marginais de estabilidade. O procedimento que serve de base a esta análise detalha-se na Secção 5.5 onde se determinam os estados marginais de estabilidade perante o efeito da absorção de radiação solar (Caso 1). Em relação aos Casos 2 e 3 apresentam-se os resultados dos estados marginais, não havendo necessidade de detalhar o respectivo procedimento;
6. Comparam-se os resultados obtidos com os resultados da análise efectuada por Veronis (1968);
7. Faz-se uma breve incursão na análise não linear da estabilidade, através da visualização no espaço dos números de Rayleigh da evolução das soluções obtidas por integração numérica. Esta análise testa a validade da análise linear efectuada.

5.2 Efeito da absorção de radiação solar (Caso 1)

A descrição do comportamento da zona gradiente considerando valores de fronteira impostos para a temperatura e salinidade e admitindo as fronteiras livres em termos de velocidade é um problema clássico de transferência de calor e massa tratado por vários autores. Neste tratamento "clássico" os perfis de temperatura e de salinidade são lineares.

No entanto, no Capítulo 1 foi evidenciada a não linearidade dos perfis de temperatura e salinidade a partir da análise de dados experimentais obtidos no Lago Solar de Pégões, através das Figuras 1.12 a 1.19. Também Zangrando (1991) aponta para o desenvolvimento de perfis não lineares, com base em experiências efectuadas.

Há pois que ter em linha de conta, na modelação da camada gradiente, as causas susceptíveis de conduzirem à não linearidade exibida pelos perfis. Dentro das possíveis causas encontra-se a absorção de radiação. Esta secção tem por objectivo avaliar a influência da absorção da radiação solar na estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar. De acordo com o trabalho efectuado em Joyce (1992), a absorção de radiação solar pode ser modelada por um coeficiente de extinção μ que contabiliza a transparência da zona gradiente (Lei de Lambert), através da expressão:

$$q''(z) = q''(d) \exp(-\mu(d - z)) \quad (5.6)$$

onde $q''(d)$ designa o fluxo de radiação incidente na fronteira superior ($z = d$) da zona gradiente devido à radiação solar. Nesta relação exponencial os valores de μ foram obtidos por regressão linear da equação (5.6) aos valores de radiação solar observados em água pura e em amostras obtidas do Lago Solar experimental de Pégões, Joyce (1992). Os valores de μ obtidos pelo processo focado, para um Lago com uma zona convectiva superior de 0.5 m de espessura e com uma zona gradiente de 1 m de espessura, constam da Tabela 5.1

água pura	$\mu = 0.2$
água do Lago Solar de Pégões	$\mu = 0.8$

Tabela 5.1: Valores de μ

A hipótese de água pura correspondente à existência mínima de absorção, ou seja, a uma situação de lago com boa transparência, o que em geral não se verifica em Lagos reais. A situação real corresponde antes a uma situação de fraca transparência, ou seja, a uma situação de valores de μ mais elevados.

5.2.1 Soluções estacionárias

Os estados estacionários da temperatura e da salinidade obtém-se anulando nas equações de conservação a velocidade \mathbf{v} e as derivadas temporais.

Estado estacionário da temperatura

A solução estacionária $T_s(x, z)$ para a temperatura é obtida a partir da equação (5.3). Nesta equação como o coeficiente de difusão térmica é constante pode permutar com o operador gradiente e a expressão da taxa de geração interna de calor, por unidade de volume na camada obtém-se, por derivação, da equação (5.6), vindo:

$$\dot{q}(z) = q''(d)\mu \exp(-\mu(d - z)) \quad (5.7)$$

Resulta, pois, que a equação do estado estacionário da temperatura é traduzida por:

$$K_T \nabla^2 T_s = -\frac{\dot{q}(z)}{\rho_m C_p} \quad (5.8)$$

e por um conjunto apropriado de condições de fronteira.

O facto de $T_s(x, z)$ ser apenas dependente de z e das equações de fronteira que complementam a equação (5.8) serem impostas em z , como se verá, permite afirmar que $T_s(x, z) = T_s(z)$ e assim a equação (5.8) é equivalente a:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = -\frac{\dot{q}(z)}{K_w} \quad (5.9)$$

onde K_w designa a condutividade térmica da água.

As condições de fronteira da zona gradiente são de fluxo imposto, ou de Neumann, vindo dadas por:

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{h_d (T_s(d) - T_\infty)}{K_w} \quad (5.10)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{q''(0)}{K_w} \quad (5.11)$$

representando $T_s(d)$ o valor da temperatura na fronteira superior, T_∞ o valor da temperatura da zona convectiva superior e h_d o coeficiente de transferência de calor na zona convectiva superior.

Na fronteira superior, o fluxo de calor da zona gradiente deve ser igual ao calor transferido para a zona superficial do Lago por convecção. Na fronteira inferior, o fluxo de calor $-k_w(\partial T_s/\partial z)$ é igual ao fluxo de calor q vindo da zona de armazenamento (dado por $q''(0) = -K_w \nabla T_s(0)$).

Considerando que não há perdas de calor pelas fronteiras laterais, e que o fundo do Lago funciona como isolante, o fluxo de calor na zona gradiente deve ser igual à diferença entre o calor total absorvido na zona de armazenamento, por unidade de área, designado por q''_{abs} , e a totalidade de calor extraído por unidade de área na mesma zona, designado por q''_{ext} , vindo:

$$q'' = q''_{abs} - q''_{ext} \quad (5.12)$$

equação que garante um balanço global de energia térmica na zona gradiente.

Como a absorção de radiação solar no Lago tem um andamento exponencialmente decrescente em μ , (5.6), considera-se, para o cálculo do calor absorvido na zona de armazenamento q''_{abs} , que esta tem uma profundidade infinita (uma vez que a absorção tende assintoticamente para zero) vindo:

$$\begin{aligned} q''_{abs} &= \int_{-\infty}^0 \dot{q}(z) dz = \lim_{y \rightarrow -\infty} [q''(d) \exp(-\mu(d-z))]_y^0 \\ &= q''(d) \exp(-\mu d) - \lim_{y \rightarrow -\infty} (q''(d) \exp(-\mu(d-y))) \\ &= q''(d) \exp(-\mu d) = q''(0) \end{aligned} \quad (5.13)$$

O fluxo de calor extraído na zona de armazenamento pode ser representado como uma fracção f_r do fluxo de calor absorvido na zona de armazenamento, vindo:

$$q''_{ext} = f_r q''(0) = f_r q''(d) \exp(-\mu d) \quad (5.14)$$

donde o fluxo de calor na zona gradiente vir dado por:

$$\begin{aligned} q''(z) &= q''_{abs} - q''_{ext} \\ &= q''(d) \exp(-\mu d) - f_r q''(d) \exp(-\mu d) \\ &= (1 - f_r) q''(d) \exp(-\mu d) \end{aligned} \quad (5.15)$$

A solução do estado estacionário da temperatura $T_s(z)$ obtém-se por dupla integração de (5.9), Giestas et al. (1996), sendo as constantes de integração determinadas a partir das condições de fronteira (5.10)-(5.11) vindo traduzida por:

$$\begin{aligned} T_s(z) &= T_\infty + \frac{q''(d)}{K_w} \exp(-\mu d) \left(-\frac{\exp(\mu z)}{\mu} + f_r(z-d) \right) - \\ &\quad \frac{f_r}{h_d} (q''(d) \exp(-\mu d)) + q''(d) \left(\frac{1}{h_d} + \frac{1}{K_w \mu} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

A Figura 5.2 representa $T_s(z)$ para os valores típicos exibidos na Tabela 5.2 podendo observar-se a não linearidade do perfil de temperatura. Observe-se que o perfil de temperatura menos linear é o que corresponde a $\mu = 0.8$ ou seja, é o que corresponde a uma situação de menor transparência do Lago.

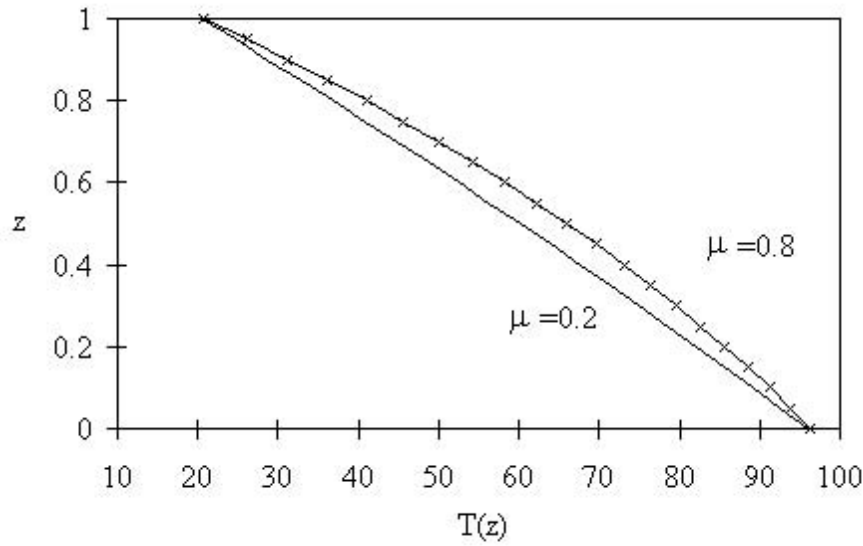


Figura 5.2: Perfil de temperatura (Caso 1)

$T_{\infty} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ $K_w = 0.6 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ $h_d = 100 \text{ W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$ $q''(d) = \begin{cases} 50 \text{ W/m}^2, & \mu = 0.2 \\ 66 \text{ W/m}^2, & \mu = 0.8 \end{cases}$

Tabela 5.2: Valores típicos de um Lago Solar

A expressão de $T_s(z)$ simplifica-se quando não existe extracção de energia ($f_r = 0$). Nesta situação, mais adversa ao início de instabilidades, forma-se um gradiente de temperaturas (destabilizador) mais forte, na zona gradiente do Lago Solar, vindo a equação (5.16) dada por:

$$T_s(z) = T_{\infty} - a \left(\frac{\exp(\mu z)}{\mu} \right) + q''(d) \left(\frac{1}{h_d} + \frac{1}{K_w \mu} \right) \quad (5.17)$$

com

$$a = \frac{q''(d)}{K_w} \exp(-\mu d) \quad (5.18)$$

No caso da extracção de energia ser total, situação que na prática é irrealista, tem-se $q''_{ext} = q''_{abs}$ vindo:

$$T_s(z) = T_{\infty} + \frac{q''(d)}{K_w} \exp(-\mu d) \left(-\frac{\exp(\mu z)}{\mu} + (z - d) \right) - \frac{1}{h_d} (q''(d) \exp(-\mu d)) + q''(d) \left(\frac{1}{h_d} + \frac{1}{K_w \mu} \right) \quad (5.19)$$

Estado estacionário da salinidade

O estado estacionário da salinidade, $S_s(x, z)$ é obtido a partir da equação (5.4) anulando as derivadas em ordem ao tempo, vindo:

$$\nabla \cdot (K_S \nabla S_s) = 0 \quad (5.20)$$

ou, como não existem fluxos segundo x de concentração salina:

$$\frac{\partial^2 S_s}{\partial z^2} = 0 \quad (5.21)$$

As condições de fronteira para esta equação obtêm-se admitindo que a zona de armazenamento possui um alto teor de sal, próximo da saturação, ao contrário da zona superficial onde a concentração é baixa. Estas duas zonas podem ser consideradas como possuindo uma capacidade infinita permitindo, na mesma linha de outros autores, que os valores da salinidade nas fronteiras da zona gradiente sejam impostos (condições de fronteira de Dirichlet) isto é

$$S_s|_{z=d} = S_d \quad (5.22)$$

$$S_s|_{z=0} = S_0 \quad (5.23)$$

A solução da equação (5.21) sujeita às condições (5.22) e (5.23) é dada por:

$$S_s(z) = S_0 + (S_d - S_0) \frac{z}{d} \quad (5.24)$$

podendo ser vista na Figura 5.3 para $S_0 = 20\%$, $S_d = 0\%$ e $d = 1$ m.

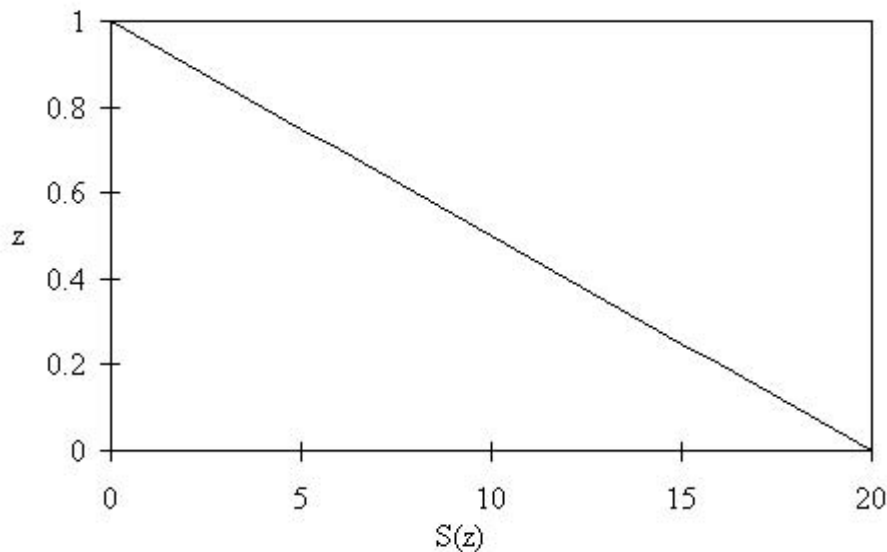


Figura 5.3: Perfil de Salinidade (Caso 1)

5.2.2 Formulação do problema de dupla difusão

A introdução da função de corrente ψ definida no Capítulo 2, em substituição da velocidade \mathbf{v} , permite que a equação da continuidade dada por (5.2) seja identicamente satisfeita.

A introdução desta nova variável, juntamente com a aplicação do operador $\nabla^* = (\frac{\partial}{\partial z}, 0, -\frac{\partial}{\partial x})$ ao sistema (5.1)-(5.5) conduz, como se viu no Capítulo 2, ao sistema nas variáveis T , S e ψ dado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \psi = -g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x}\right) + J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (5.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K_T \nabla)\right) T = J(\psi, T) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (5.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla(K_S \nabla)\right) S = J(\psi, S) \quad (5.27)$$

A solução para as variáveis dependentes T , S e ψ é constituída pela soma de funções de perturbação com as soluções estacionárias T_s , S_s vindo ψ_s identicamente nula, atendendo à sua definição. Tem-se pois que:

$$\psi(x, z, t) = \tilde{\psi}(x, z, t) \quad (5.28)$$

$$T(x, z, t) = T_s(z) + \tilde{T}(x, z, t) \quad (5.29)$$

$$S(x, z, t) = S_s(z) + \tilde{S}(x, z, t) \quad (5.30)$$

onde o $(\tilde{\quad})$ denota os termos de perturbação. Introduzindo as relações (5.28)-(5.30) no sistema (5.25)-(5.27) obtém-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \tilde{\psi} = -g \left(\alpha \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \beta \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}\right) + J(\tilde{\psi}, \nabla^2 \tilde{\psi}) \quad (5.31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K_T \nabla^2\right) \tilde{T} = J(\tilde{\psi}, \tilde{T}) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} a[\exp(\mu z) - f_r] \quad (5.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K_S \nabla^2\right) \tilde{S} = J(\tilde{\psi}, \tilde{S}) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \quad (5.33)$$

Este sistema de equações é complementado pelo seguinte conjunto de condições de fronteira.

Condições de fronteira

As condições de fronteira do sistema (5.31)-(5.33), são dadas por subtração das condições de fronteira obtidas para os estados estacionários das condições de fronteira do sistema (5.1)-(5.5), vindo:

$$\tilde{\psi}|_{z=0,d} = \psi|_{z=0,d} - \psi_s|_{z=0,d} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}|_{z=0,d} = \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0,d} - \frac{\partial T_s}{\partial z}|_{z=0,d} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial z}|_{z=0,d} = \frac{\partial S}{\partial z}|_{z=0,d} - \frac{\partial S_s}{\partial z}|_{z=0,d} \quad (5.36)$$

Velocidade De acordo com a hipótese posta por Veronis (1965), Schechter et al. (1981) e Costa et al. (1981), entre outros, o presente trabalho considera que na interface da zona gradiente com as zonas adjacentes não existem movimentos verticais, isto é

$$w|_{z=d} = 0, \quad w|_{z=0} = 0 \quad (5.37)$$

Como

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

tem-se de uma forma equivalente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=d} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad (5.38)$$

Considera-se também, à semelhança dos trabalhos de Veronis, que as fronteiras são livres, hipótese que se traduz numa tensão de corte nula:

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=d} = 0 \quad (5.39)$$

Como a tensão de corte se exprime por

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (5.40)$$

ou, em termos de função de corrente de corrente, por:

$$\sigma_{xz} = \mu \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (5.41)$$

introduzindo as relações dadas por (5.37), (5.38) em (5.41) vem:

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=d} = 0 \implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=d} = 0 \quad (5.42)$$

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=0} = 0 \implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad (5.43)$$

A função de corrente é definida a menos de uma constante, podendo pôr-se $\psi = 0$ em $z = 0$ permitindo escrever:

$$\psi(d) = \psi(0) + \int_0^d \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \psi(0) + \int_0^d u(x, z) dz = \psi(0) \quad (5.44)$$

e de uma forma análoga:

$$\psi(\lambda) = \psi(0) + \int_0^\lambda -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \psi(0) + \int_0^\lambda w(x, z) dx = \psi(0) \quad (5.45)$$

Da hipótese (5.37) resulta $w(x, z) = 0$ donde $\psi(\lambda) = \psi(0)$ e logo $\psi(d) = \psi(0)$. O princípio da conservação da massa implica que:

$$\psi|_{z=d} = 0, \quad \psi|_{z=0} = 0 \quad (5.46)$$

$$\psi|_{x=\lambda} = 0, \quad \psi|_{x=0} = 0 \quad (5.47)$$

Temperatura e Salinidade A partir das respectivas condições de fronteira para o estado estacionário tem-se, para a temperatura e para a salinidade:

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{h_d \tilde{T}}{K_w} \quad (5.48)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (5.49)$$

$$\tilde{S}|_{z=d} = 0 \quad (5.50)$$

$$\tilde{S}|_{z=0} = 0 \quad (5.51)$$

Em face do exposto, pode concluir-se que as condições de fronteira impostas para a velocidade são do tipo misto, enquanto que as condições para a temperatura são de Neumann e para a salinidade são de Dirichlet.

5.2.3 Adimensionalização do sistema de equações

O sistema de equações escrito em termos das perturbações (5.31)-(5.33) é adimensionalizado de acordo com as relações:

$$\tilde{\psi} = K_T \hat{\psi}, \quad \tilde{T} = (\Delta T) \hat{T}, \quad \tilde{S} = (\Delta S) \hat{S} \quad (5.52)$$

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{d}, \quad a = \hat{a} \frac{\Delta T}{d}, \quad \tau = \frac{K_S}{K_T} \quad (5.53)$$

$$t = \frac{d^2}{K_T} \hat{t}, \quad (x, z) = d(\hat{x}, \hat{z}), \quad \nabla = \frac{1}{d} \hat{\nabla} \quad (5.54)$$

onde as variáveis adimensionais estão escritas com $\hat{\quad}$, resultando :

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \right) \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} = -R_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + R_S \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{Pr} J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \quad (5.55)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \right) \hat{T} = J(\hat{\psi}, \hat{T}) - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \hat{a} [\exp(\hat{\mu} \hat{z}) - f_r] \quad (5.56)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} - \tau \hat{\nabla}^2 \right) \hat{S} = J(\hat{\psi}, \hat{S}) - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \quad (5.57)$$

Neste sistema de equações diferenciais não lineares, a adimensionalização fez surgir de uma forma explícita, alguns números adimensionais que permitem caracterizar o escoamento. Assim R_T e R_S designam os números de Rayleigh térmico e salino que serão escolhidos como parâmetros críticos, ou de controlo, para a análise de estabilidade. O sistema de equações dado por (5.55)-(5.57) é acompanhado do seguinte conjunto de condições de fronteira.

Condições de fronteira

- Para a velocidade:

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{z}^2} \Big|_{\hat{z}=1} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{z}^2} \Big|_{\hat{z}=0} = 0 \quad (5.58)$$

$$\hat{\psi} \Big|_{\hat{z}=1} = \hat{\psi} \Big|_{\hat{z}=0} = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{x}^2} \Big|_{\hat{x}=\hat{\lambda}} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{x}^2} \Big|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (5.60)$$

$$\hat{\psi} \Big|_{\hat{x}=\hat{\lambda}} = \hat{\psi} \Big|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (5.61)$$

- Para a temperatura:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=1} = -\frac{h_d d}{K_w} \hat{T}, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \Big|_{\hat{z}=0} = 0 \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{\lambda}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (5.63)$$

- e para a salinidade

$$\hat{S} \Big|_{\hat{z}=1} = \hat{S} \Big|_{\hat{z}=0} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{\lambda}} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (5.65)$$

5.2.4 Formulação fraca

A formulação fraca do sistema de equações (5.55)-(5.57) é obtida de acordo com a metodologia exposta no Capítulo 4. Sendo U_{n_1} , U_{n_2} e U_{n_3} os subespaços das funções tentativa φ_i , ξ_i e ϖ_i tem-se:

Temperatura

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} (\nabla(a_i \varphi_i) \cdot \nabla \varphi_j) d\Omega \quad (5.66)$$

$$(f, \varphi_j) = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial t} + J((c_i \varpi_i), (a_j \varphi_j)) - \frac{\partial(c_i \varpi_j)}{\partial x} a(\exp(\mu z) - f_r) \right\} \varphi_j d\Omega \quad (5.67)$$

$\forall \varphi_j \in U_{n_1}$ com $j = 1, 2$.

Salinidade

$$a(\xi_i, \xi_j) = \int_{\Omega} (\nabla(b_i \xi_i) \cdot \nabla \xi_j) d\Omega \quad (5.68)$$

$$(f, \xi_j) = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial(b_i \xi_i)}{\partial t} \xi_j + J((c_i \varpi_i), (b_i \xi_j)) - \frac{\partial(c_i \varpi_i)}{\partial x} \right) \xi_j d\Omega \quad (5.69)$$

$\forall \xi_j \in U_{n_2}$ com $j = 1, 2$.

Velocidade

$$a(\varpi_i, \varpi_j) = -\frac{1}{Pr} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta(c_i \varpi_i) \cdot \Delta \varpi_j) \right) d\Omega \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} (f, \varpi_j) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla((c_i \varpi_i) \cdot \nabla \varpi_j)) + J((c_i \varpi_i), \nabla^2(c_i \varpi_j)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(R_T \frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial x} - R_S \frac{\partial(b_i \xi_i)}{\partial x} \right) \right\} \varpi_j d\Omega \end{aligned} \quad (5.71)$$

$\forall \varpi_j \in U_{n_3}$ com $j = 1$.

As funções de aproximação propostas para T_{n_1} , S_{n_2} e ψ_{n_3} são dadas por:

$$T_2 = a_1(t)\varphi_1(x, z) + a_2(t)\varphi_2(x, z) \quad (5.72)$$

$$S_2 = b_1(t)\xi_1(x, z) + b_2(t)\xi_2(x, z) \quad (5.73)$$

$$\psi_1 = c_1(t)\varpi_1(x, z) \quad (5.74)$$

com as seguintes funções tentativa φ_i , ξ_i e ϖ_i :

$$\varphi_1(x, z) = \xi_1(x, z) = z(1 - z) \quad (5.75)$$

$$\varphi_2(x, z) = \xi_2(x, z) = z(1 - z) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.76)$$

$$\varpi_1(x, z) = z^2(1 - z) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (5.77)$$

O conjunto de funções de aproximação proposto está de acordo com o critério de escolha de funções tentativa e de funções teste, referido na Secção 4.3.4.

A estrutura destas funções acenta no produto de um polinómio em z por uma sinusóide em x . Enquanto o primeiro permite a verificação das condições essenciais, no caso da salinidade e da função de corrente, a segunda permite acomodar variações periódicas em x (formação de células de convecção). As condições de fronteira essenciais são verificadas, não existindo termos provenientes dos integrais de fronteira.

Observe-se que a utilização de outras funções tentativa não apontou para resultados diferentes, o que traduz o facto do método não ser muito sensível à escolha efectuada. A título de exemplo mostram-se em seguida algumas funções de aproximação utilizadas para a temperatura, empregando um subespaço de funções tentativa de dimensão três:

$$(T_3)_1 = a_1(t) + za_2(t) + z^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_3(t) \quad (5.78)$$

$$(T_3)_2 = a_1(t) + z \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_2(t) + \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_3(t) \quad (5.79)$$

$$(T_3)_3 = a_1(t) + z \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_2(t) + \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_3(t) \quad (5.80)$$

$$(T_3)_4 = a_1(t) + z \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_2(t) + z^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)a_3(t) \quad (5.81)$$

e considerando para a salinidade e para a função de corrente as seguintes aproximações:

$$S_2 = z(1 - z)b_2(t) + z(1 - z) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)b_3(t) \quad (5.82)$$

$$\psi_1 = z^2(1 - z) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)c_3(t) \quad (5.83)$$

Constatou-se que, enquanto os resultados em termos de estabilidade não se alteraram substancialmente, (apenas diferem na quarta casa decimal do valor do comprimento da célula de convecção), os cálculos a efectuar tornaram-se bastante mais complicados.

Concluiu-se, pois, que a representação com subespaços de dimensão dois para as funções tentativa das variáveis T , S e ψ é suficiente para estabelecer os critérios de estabilidade marginal.

O conjunto das relações

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j) \quad (5.84)$$

$$a(\xi_i, \xi_j) = (f, \xi_j) \quad (5.85)$$

$$a(\varpi_i, \varpi_j) = (f, \varpi_j) \quad (5.86)$$

conduz a matrizes quadradas de ordem 5 em consequência dos subespaços U_{n_1} U_{n_2} terem cada um dimensão 2 e do subespaço U_{n_3} ter dimensão 1. Refira-se o facto destas matrizes serem simétricas, ou mesmo diagonais. A título exemplificativo apresenta-se a equação matricial que corresponde à relação (5.84):

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{3} & 0 \\ 0 & \frac{(5\lambda^2 + 2\pi^2)}{30\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{30} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{420}c_1 \\ -\frac{\pi}{420}c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{\pi a}{\mu^6} 2 \exp(\mu)[60 - 36\mu + 9\mu^2 - \mu^3] - \frac{\pi a}{20\mu^6}[-8\mu - \mu^2] - \frac{\pi a}{60}(f + 1)\right) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

A formulação fraca empregue conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias nas variáveis dependentes, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $c_1(t)$ dado por:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -10a_1 + \frac{\pi}{14\lambda}a_2c_1 \\ \dot{a}_2 = -\frac{2}{\lambda}L_2a_2 - \frac{\pi}{\lambda}\left(a(m_1 + 60m_2 - f_r) + \frac{a_1}{7}\right)c_1 \\ \dot{b}_1 = -10\tau b_1 + \frac{\pi}{14\lambda}b_2c_1 \\ \dot{b}_2 = -\frac{2}{\lambda}\tau L_2b_2 - \frac{\pi}{\lambda}\left(1 + \frac{b_1}{7}\right)c_1 \\ \dot{c}_1 = -2PrL_1L_3c_1 - \frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda(R_Ta_2 - R_Sb_2) \end{cases} \quad (5.88)$$

onde

$$L_1 = \frac{1}{2\pi^2 + 7\lambda^2}, \quad L_2 = \frac{2\pi^2 + 5\lambda^2}{\lambda}, \quad L_3 = \frac{4\pi^4 + 28\lambda^2\pi^2 + 105\lambda^4}{\lambda^2} \quad (5.89)$$

$$m_1 = \frac{120 \exp(\mu)[\mu^3 - 9\mu^2 + 36\mu - 60]}{\mu^6}, \quad m_2 = \frac{6(\mu^2 + 8\mu + 20)}{\mu^6} \quad (5.90)$$

O estudo da estabilidade da zona gradiente do Lago Solar, considerando o efeito da absorção de radiação solar fica, desta forma, reduzido ao estudo da estabilidade deste sistema.

A partir do sistema de equações diferenciais ordinárias (5.88) obtêm-se as curvas dos estados marginais de estabilidade. Observe-se que é possível obter a solução numérica deste sistema, de uma forma simples, empregando por exemplo, um método de Runge Kutta de 4ª ordem com controlo do erro.

A simulação numérica da solução pode, igualmente, ser visualizada no espaço dos números de Rayleigh (R_S, R_T) dando indicação do tipo de solução para os campos da temperatura, da salinidade e da velocidade e, por consequência, do comportamento físico da zona gradiente do Lago.

5.2.5 Análise de estabilidade

Introdução

Esta subsecção apresenta em detalhe o procedimento que serve de base à determinação dos estados marginais de estabilidade, para as diferentes formas propostas para representar o comportamento da zona gradiente, segundo a Teoria Linear de estabilidade exposta na Secção 3.2.

Assim, começa-se por se linearizar o sistema de equações diferenciais ordinárias (5.88) em torno da origem. De seguida propõem-se expressões para as variáveis a_1, a_2, b_1, b_2 e c_1 dependentes de um número complexo σ . Substituindo estas expressões no sistema linearizado obtém-se um sistema dependente do parâmetro σ . Os estados de estabilidade marginal são determinados a partir da análise deste parâmetro.

Na posse dos critérios de estabilidade, faz-se uma breve incursão na análise não linear, com a integração numérica do sistema não linear (5.88). A partir da visualização gráfica de alguns pontos da solução, num espaço de fase apropriado, é possível fazer uma análise sucinta da morfologia da solução considerada.

Análise de estabilidade linear

A linearização do sistema de equações (5.88) em torno da origem, conduz a:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -10a_1 \\ \dot{a}_2 = -\frac{2}{\lambda}L_2a_2 - \frac{\pi}{\lambda}a(m_1 + 60m_2 - f_r)c_1 \\ \dot{b}_1 = -10\tau b_1 \\ \dot{b}_2 = -\frac{2}{\lambda}\tau L_2b_2 - \frac{\pi}{\lambda}c_1 \\ \dot{c}_1 = -2PrL_1L_3c_1 - \frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda(R_Ta_2 - R_Sb_2) \end{cases} \quad (5.91)$$

Com o objectivo de analisar a estabilidade deste sistema de equações, propõem-se como soluções $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $c_1(t)$, as seguintes relações :

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \exp(\sigma t) \\ a_2(t) = A_2 \exp(\sigma t) \\ b_1(t) = B_1 \exp(\sigma t) \\ b_2(t) = B_2 \exp(\sigma t) \\ c_1(t) = C_1 \exp(\sigma t) \end{cases} \quad (5.92)$$

onde σ é um número complexo e A_1 , A_2 , B_1 , B_2 e C_1 são amplitudes.

As soluções (5.92) são introduzidas no sistema (5.91) vindo:

$$\sigma A_1 \exp(\sigma t) = -10A_1 \exp(\sigma t) \quad (5.93)$$

$$\sigma A_2 \exp(\sigma t) = -\frac{2}{\lambda}L_2A_2 \exp(\sigma t) - \frac{\pi}{\lambda}a(m_1 + 60m_2 - f_r)C_1 \exp(\sigma t) \quad (5.94)$$

$$\sigma B_1 \exp(\sigma t) = -10\tau B_1 \exp(\sigma t) \quad (5.95)$$

$$\sigma B_2 \exp(\sigma t) = -\frac{2}{\lambda}\tau L_2B_2 \exp(\sigma t) - \frac{\pi}{\lambda}C_1 \exp(\sigma t) \quad (5.96)$$

$$\sigma C_1 \exp(\sigma t) = -2PrL_1L_3C_1 \exp(\sigma t) - \frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda(R_TA_2 - R_SB_2) \exp(\sigma t) \quad (5.97)$$

donde resulta que

$$(\sigma + 10)A_1 = 0 \quad (5.98)$$

$$\left(\sigma + \frac{2}{\lambda}L_2\right)A_2 = \left(-\frac{\pi}{\lambda}a(m_1 + 60m_2 - f_r)\right)C_1 \quad (5.99)$$

$$(\sigma + 10\tau)B_1 = 0 \quad (5.100)$$

$$\left(\sigma + \frac{2}{\lambda}\tau L_2\right)B_2 = \left(-\frac{\pi}{\lambda}\right)C_1 \quad (5.101)$$

$$(\sigma + 2PrL_1L_3)C_1 = \left(-\frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda(R_TA_2 - R_SB_2)\right) \quad (5.102)$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} C_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 2PrL_1L_3 + \sigma & 0 & \frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda R_T & 0 & -\frac{7}{4}PrL_1\pi\lambda R_S \\ 0 & 10 + \sigma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda}A & 0 & \frac{2}{\lambda}L_2 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10\tau + \sigma & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda}\tau L_2 + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

onde

$$A = a(m_1 + 60m_2 - f_r) \quad (5.105)$$

Para que o sistema (5.91) tenha soluções não triviais é necessário que $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, onde \mathbf{A} é a matriz associada, conduzindo esta relação ao polinómio de 5ª ordem em σ dado por:

$$p_5(\sigma) = (10 + \sigma)(10\tau + \sigma) \left(\sigma^3 + D_1\sigma^2 + D_2\sigma + D_3 \right) \quad (5.106)$$

com

$$D_1 = \frac{2L_2}{\lambda}(1 + \tau) + 2PrL_1L_3 \quad (5.107)$$

$$D_2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2}{\lambda}\tau + (1 + \tau)PrL_1L_3 \right) + \frac{7\pi^2}{4}PrL_1(R_S - AR_T) \quad (5.108)$$

$$D_3 = \frac{8\tau PrL_1L_2^2L_3}{\lambda^2} + \frac{7\pi^2}{2\lambda}PrL_1L_2(R_S - A\tau R_T) \quad (5.109)$$

As raízes negativas de $p_5(\sigma)$ obtidas para $\sigma = -10$ e $\sigma = -10\tau$ correspondem a soluções estáveis, ($\text{Re}(\sigma) < 0$), de acordo com o exposto no Capítulo 3. Desta forma, a estabilidade do sistema (5.91) depende da natureza das raízes do polinómio de 3º grau dado por:

$$p_3(\sigma) = \sigma^3 + D_1\sigma^2 + D_2\sigma + D_3 \quad (5.110)$$

Segundo a teoria espectral e em particular o Princípio da Estabilidade Linear (3.2.2), tem-se que:

1. Se $\text{Re}(\sigma) < 0$ o estado estacionário é assintoticamente estável correspondendo a um decrescimento exponencial da amplitude de perturbação;
2. Se $\text{Re}(\sigma) > 0$ não existe solução com significado físico uma vez que a amplitude da perturbação cresce exponencialmente para uma situação de instabilidade ilimitada;
3. Se $\text{Re}(\sigma) = 0$ as soluções de estabilidade marginal são de dois tipos:
 - (a) $\text{Im}(\sigma) \neq 0$: a solução é periódica, correspondendo ao limite de estabilidade marginal para o início das instabilidades;
 - (b) $\text{Im}(\sigma) = 0$: a solução é estacionária, correspondendo ao limite de estabilidade marginal para o estado de convecção estacionária.

Análise do caso em que $\text{Re}(\sigma) = 0$, $\text{Im}(\sigma) \neq 0$

Seja $\sigma = i\omega_0$ onde ω_0 é um número real que representa a frequência angular da perturbação correspondente ao início de movimento periódico, por vezes designado por sobreestável.

Substituindo $\sigma = i\omega_0$ em $p_3(\sigma)$ obtém-se um polinómio complexo cujas partes real e imaginária são dadas por:

$$\text{Re}(\sigma) = -\omega_0^2 D_1 + D_3 \quad (5.111)$$

$$\text{Im}(\sigma) = \omega_0[-\omega_0^2 + D_2] \quad (5.112)$$

Resolvendo $\text{Im}(\sigma) = 0$ em ordem a ω_0^2 obtém-se a frequência de oscilação:

$$\omega_0^2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2\tau}{\lambda} + PrL_1L_3(1 + \tau) \right) + \frac{7}{4}PrL_1\pi^2(R_S - AR_T) \quad (5.113)$$

Substituindo ω_0^2 em $\text{Re}(\sigma)$ a equação que corresponde ao estado marginal para o início de movimento oscilatório vem traduzida por:

$$R_T = E \left(\frac{Pr + \tau F}{Pr + F} \right) R_S + \frac{16}{7}E \frac{(1 + \tau)L_2(Pr + \tau F)}{Pr\pi^2\lambda^2L_1} \quad (5.114)$$

onde

$$E = f(\mu) = \frac{1}{A} \quad (5.115)$$

$$F = f(\lambda) = \frac{(2\pi^2 + 5\lambda^2)(2\pi^2 + 7\lambda^2)}{4\pi^4 + 28\lambda^2\pi^2 + 105\lambda^4} \quad (5.116)$$

Análise do caso em que $\text{Re}(\sigma) = 0$, $\text{Im}(\sigma) = 0$

Nesta situação as funções $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $c_1(t)$ são constantes, correspondendo a um estado de convecção estacionária. A equação que traduz este estado obtém-se, substituindo $\sigma = 0$ em $p_3(\sigma)$, resultando $D_3 = 0$, donde:

$$R_T = E \frac{1}{\tau} R_S + \frac{16}{7} E \frac{L_2 L_3}{\pi^2 \lambda} \quad (5.117)$$

Observe-se que nas equações de estabilidade marginal (5.114), (5.117) a influência da absorção de radiação solar está expressa no parâmetro E , o qual depende exclusivamente do valor do coeficiente de extinção μ .

A zona onde ocorre movimento oscilatório, correspondendo a ω_0 real ou, equivalentemente, a $\omega_0^2 > 0$, é dada pela intersecção dos semi-planos definidos por:

$$R_T > E \left(\frac{Pr + \tau F}{Pr + F} \right) R_S + \frac{16}{7} E \frac{(1 + \tau) L_2 (Pr + \tau F)}{Pr \pi^2 \lambda^2 L_1} \quad (5.118)$$

$$R_T < ER_S + \frac{16}{7} E \frac{L_2 [L_2 \tau + Pr L_1 L_3 \lambda (1 + \tau)]}{Pr \pi^2 \lambda^2 L_1} \quad (5.119)$$

onde a inequação (5.119) resulta da imposição de $\omega_0^2 > 0$ em (5.113).

O valor de λ que minimiza o segundo membro da desigualdade (5.119) corresponde ao início de movimento oscilatório. Para a sua obtenção tomaram-se os valores típicos do Lago Solar que constam da Tabela 5.2, vindo:

$$\lambda \approx 2.1298 \quad (5.120)$$

Este valor fornece a largura das células de convecção, estando de acordo com a afirmação de Chandrasekar Chandrasekhar (1961) de que, no problema de Rayleigh-Bénard, o comprimento das células é aproximadamente igual ao dobro da sua altura.

A partir do valor de λ obtido, as equações (5.114) e (5.117) dos estados marginais de estabilidade vêm dadas, respectivamente por:

$$R_T = 0.9249 ER_S + 52.93 E \quad (5.121)$$

$$R_T = 100 ER_S + 1827.0 E \quad (5.122)$$

Obs. 5.2.1 *Empregando um subespaço de funções tentativa de dimensão 3 (para a temperatura), de acordo com o que foi referido na secção anterior, a análise de estabilidade conduz ao valor $\lambda = 2.2925$. As equações dos estados marginais, por seu lado, apresentam uma configuração idêntica à obtida nesta secção. Não se afigura, pois, necessário detalhar a análise efectuada, aumentando a dimensão do subespaço das funções tentativa.*

5.2.6 A influência da absorção de radiação na estabilidade do Lago Solar

O estado estacionário do campo da temperatura, dado por (5.16) é apresentado na Figura 5.4 considerando valores de $\mu = 0.2$ e $\mu = 0.8$. Da análise da Figura 5.4 pode concluir-se que para valores baixos de μ o Lago desenvolve maiores gradientes de temperatura para

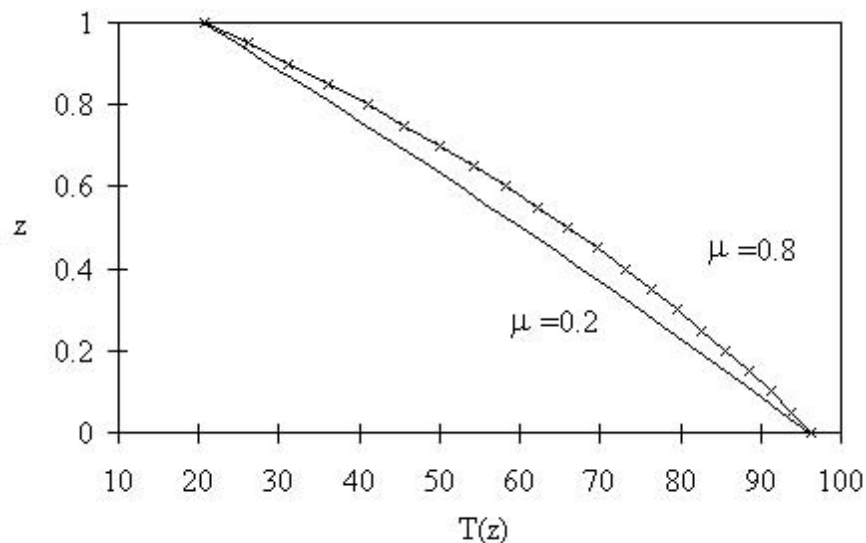


Figura 5.4: Perfis estacionários de temperatura ($\mu = 0.8$ e $\mu = 0.2$)

o mesmo valor da radiação solar. Neste sentido um Lago com uma boa transparência é mais susceptível ao início de instabilidades do que um Lago menos transparente. No entanto, para analisar a influência da absorção na estabilidade da zona gradiente, deve-se considerar uma situação de igual gradiente de temperatura, isto é uma situação onde o valor de R_T seja igual para $\mu = 0.2$ e $\mu = 0.8$.

Os estados marginais correspondentes ao início de movimento oscilatório (5.121) para os dois valores de μ considerados estão representados na Figura 5.5, bem como a equação

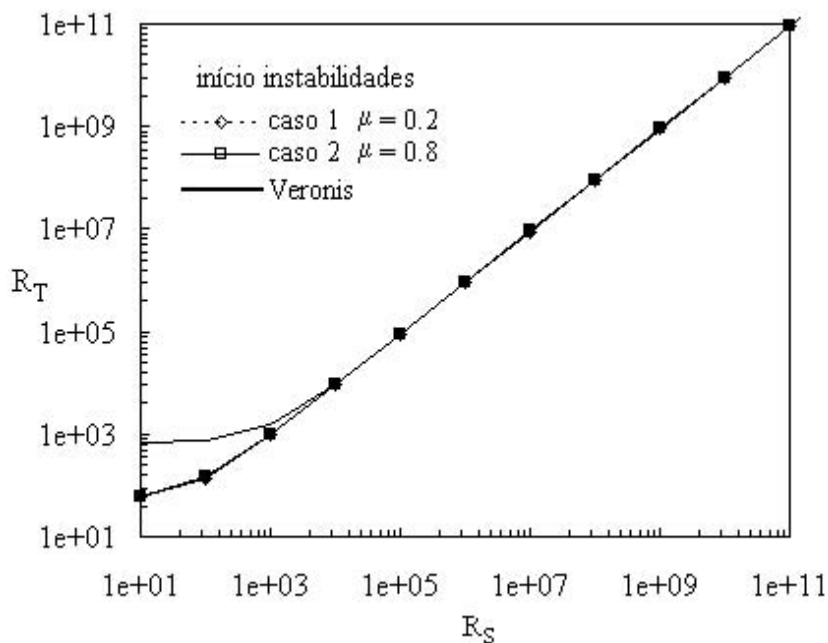


Figura 5.5: Início de instabilidades ($\mu = 0.8$ e $\mu = 0.2$): Eq.(5.121) e resultado de Veronis

obtida por Veronis, (3.78), para a mesma situação.

Observe-se que a representação assume o caso pior, do ponto de vista da estabilidade para o Lago, o qual corresponde a não haver extracção de energia na zona de armazenamento ou zona convectiva inferior.

A Figura 5.5 mostra que o estado marginal para o início de movimento oscilatório no caso de um Lago pouco transparente, está apenas levemente abaixo do estado correspondente para o caso de um Lago com uma boa transparência, embora a diferença entre as duas curvas diminua à medida que o valor de R_S aumenta.

Pode pois concluir-se que, para manter a não convectividade da zona gradiente, para um mesmo valor de R_T , é necessário aumentar o gradiente de salinidade nos lagos menos transparentes. A Figura 5.5 evidencia, ainda, que os estados marginais obtidos estão próximos do estado marginal obtido por Veronis, excepto para o caso de valores pequenos do número de Rayleigh térmico.

A zona onde ocorre movimento oscilatório está ilustrada na Figura 5.6 dada pela

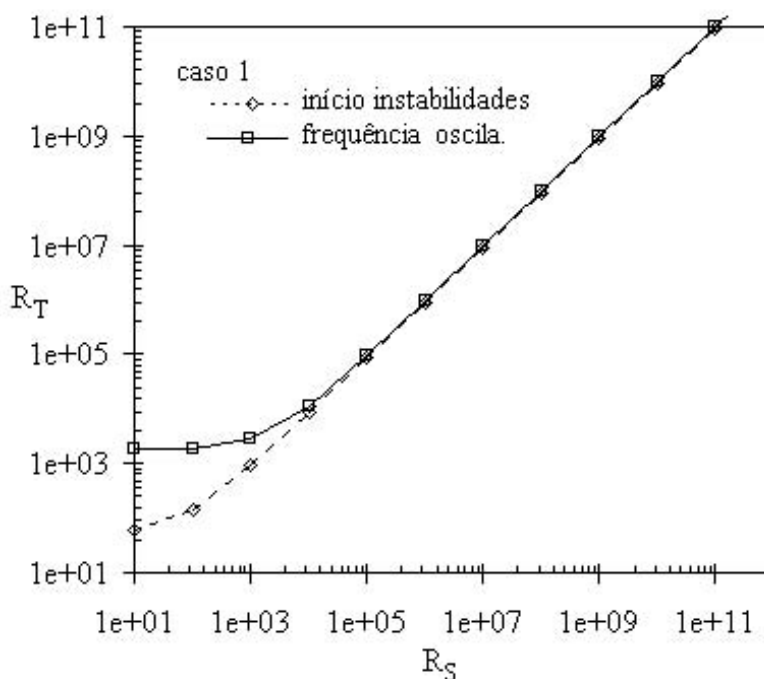


Figura 5.6: Limites do movimento periódico ($\mu = 0.8$): Ini. Inst. Eq.: (5.121), Freq. Osc. Eq.: (5.119)

intersecção dos semi-planos (5.118)-(5.119).

Os estados marginais para o início de movimento oscilatório (5.121) e para o início de convecção estacionária (5.122) para o caso $\mu = 0.8$ são apresentados na Figura 5.7. Da observação desta pode concluir-se que as instabilidades ocorrem através de movimentos oscilatórios, desde a linha dada pela equação (5.122), até passarem a movimento estacionário, cujo estado marginal é dado por (5.121). A perturbação do estado inicial, no qual apenas ocorrem transferências de calor e massa por difusão, implicou que este estado evoluísse para uma situação de convecção estacionária. A transição entre o estado difusivo

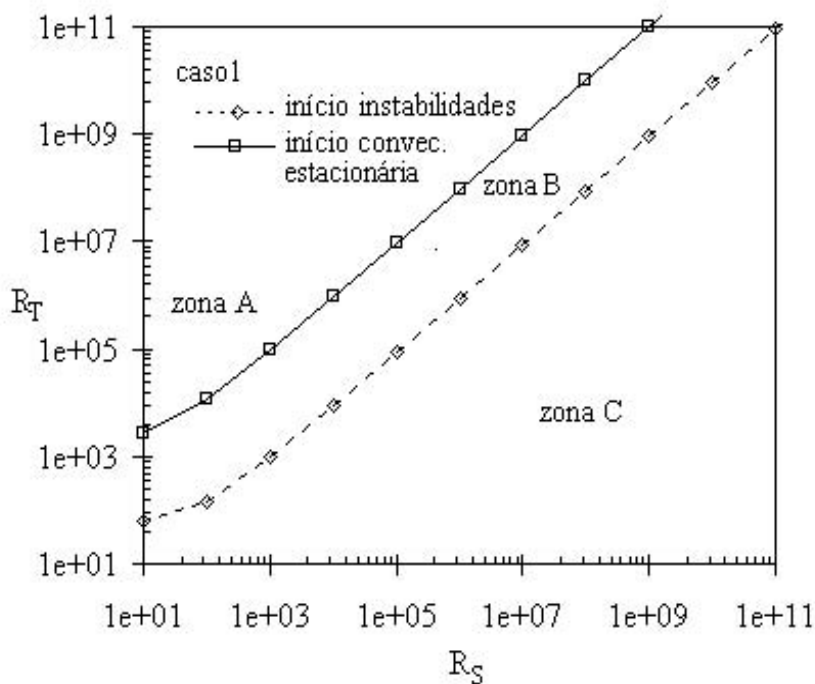


Figura 5.7: Estados marginais de estabilidade ($\mu = 0.8$): Ini. Inst. Eq.:(5.121), Conv. Est. Eq.:(5.122)

(Zona C) e o estado convectivo (Zona A) dá-se através de movimento oscilatório (Zona B), periódico ou aperiódico.

5.2.7 Análise não linear de estabilidade

No procedimento efectuado de acordo com a Teoria Linear de estabilidade desprezam-se os termos de segunda ordem do sistema (5.91).

Com o objectivo de verificar se os resultados obtidos são, pelo menos qualitativamente, independentes da aproximação considerada, determinou-se a solução numérica do sistema não linearizado dado por (5.91), através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com um processo adaptativo de controlo de passo e considerando a modificação de Gill para a compensação dos erros de arredondamento Ralston and Will (1960).

A visualização do comportamento dinâmico das variáveis dependentes é efectuada no espaço de fase $(c_1(t), a_1(t), a_2(t))$. O termo $c_1(t)$ corresponde à evolução temporal da velocidade e os termos $a_1(t)$ e $a_2(t)$ correspondem à evolução temporal da temperatura.

A escolha deste espaço de fase tem por base o facto de ser a temperatura a variável dominante em todo o processo de dupla difusão.

Fazendo uma divisão do plano (R_S, R_T) em 3 zonas, de acordo com a Figura 5.7, e onde cada zona corresponde a um tipo de movimento diferente, tem-se para $\lambda = 2.1298$, $\mu = 0.8$ e $f_r = 0$, que:

- A zona A corresponde a uma situação de convecção estacionária evidenciada através de de um ciclo limite (velocidade diferente de zero), Figura 5.8.

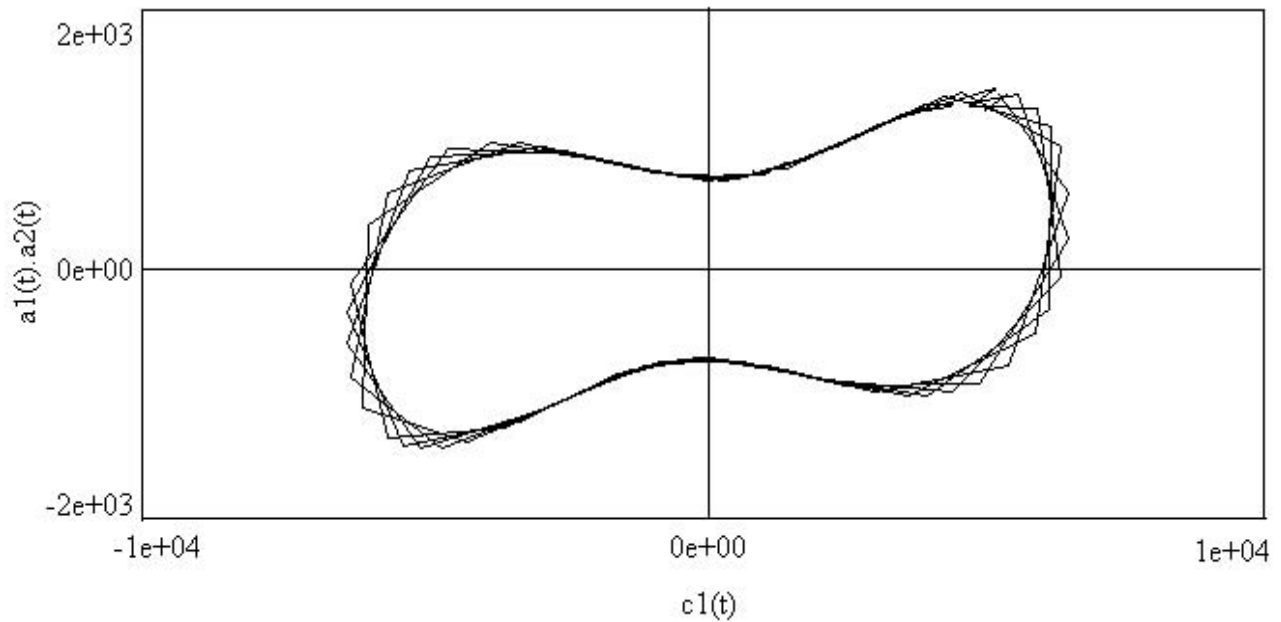


Figura 5.8: Zona A, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)

- A zona B é instável o que está de acordo com a presença de movimentos aperiódicos, Figura 5.9, apontando para a existência de um atrator estranho.

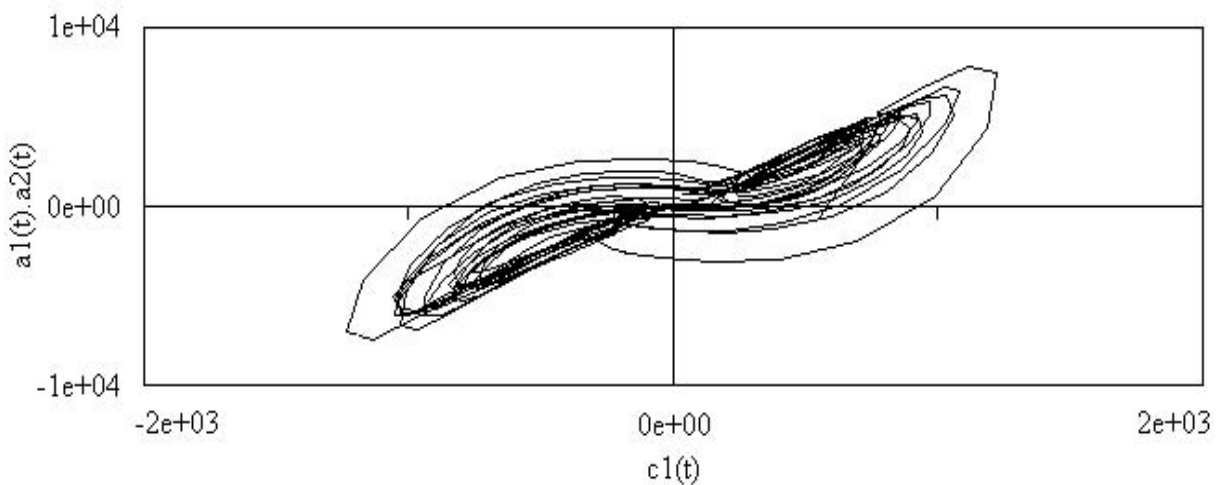


Figura 5.9: Zona B, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)

- Na zona C, as trajetórias tendem para um ponto de velocidade nula, correspondendo a uma solução estacionária (regime difusivo puro), Figura 5.10, caracterizada pela presença de um atrator do tipo poço.

As zonas A, B e C são delimitadas pelas rectas das equações dos estados marginais determinadas pela Teoria Linear. A visualização nos espaço de fase obtida, está de acordo

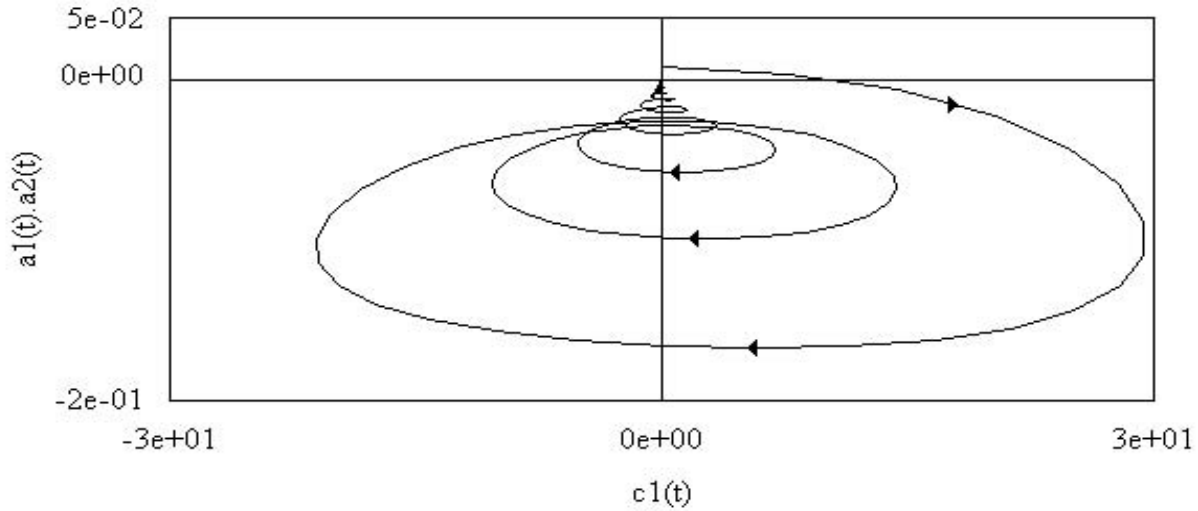


Figura 5.10: Zona C, $c_1(t)$ vs. $a_1(t).a_2(t)$ (Caso 1)

com os resultados apontados pela Teoria Linear no que toca a delimitação das diferentes zonas de estabilidade. Note-se, porém, que os pontos considerados estão inclusos a cada zona, nada se sabendo sobre a solução junto das curvas de estabilidade marginal. Para inferir resultados mais gerais seria necessário obter a visualização da solução junto das curvas de estabilidade marginal. Para a análise pretendida afigura-se contudo suficiente a constatação de que a análise não linear aponta para resultados concordantes com os da Teoria Linear pelo menos a nível de zonas de estabilidade.

5.2.8 Comparação com os resultados obtidos por Veronis

As equações dos estados marginais de estabilidade obtidas por Veronis são dadas por (3.76) e (3.78) e as equações dos estados marginais de estabilidade relativos ao Caso 1 são dados por (5.117) e (5.114).

Atendendo ao facto dos termos independentes dos segundos membros destas equações serem muito pequenos face aos valores dos termos dependentes, aqueles podem ser desprezados, à semelhança do tratamento efectuado para a análise de Veronis, vindo de (5.114), e (5.117):

$$R_T = E \left(\frac{Pr + \tau F}{Pr + F} \right) R_S \quad (5.123)$$

$$R_T = E \frac{1}{\tau} R_S \quad (5.124)$$

e de (3.76) e (3.78):

$$R_T = \left(\frac{Pr + \tau}{Pr + 1} \right) R_S \quad (5.125)$$

$$R_T = \frac{1}{\tau} R_S \quad (5.126)$$

Como se referiu no Capítulo 3, na ausência hipotética de fenómenos de dupla difusão o critério de estabilidade estática para a zona gradiente dado por $\partial\rho/\partial z < 0$, considerando a equação de estado (2.98) conduz à inequação:

$$R_S > R_T \quad (5.127)$$

Ora, de acordo com Veronis (1968), uma camada de fluido com um gradiente salino aquecida por baixo mantém-se estável se

$$R_S > \frac{Pr + 1}{Pr + \tau} R_T \quad (5.128)$$

o que, para os valores de Pr e de τ apresentados na Tabela 5.2, e tidos como típicos de um Lago Solar, corresponde a:

$$R_S > 1.14R_T \quad (5.129)$$

Da observação das relações dadas por (5.127) e (5.128) conclui-se assim que, segundo Veronis, para manter a zona gradiente não convectiva é necessário que o valor do número de Rayleigh salino seja pelo menos 14% maior do que o valor necessário quando não se consideram fenómenos de dupla difusão.

Uma análise análoga efectuada no Caso 1, conduz às condições de não convecção dadas, para os valores de μ considerados, por:

$$R_S > 1.074R_T, \quad \mu = 0.2 \quad (5.130)$$

$$R_S > 1.125R_T, \quad \mu = 0.8 \quad (5.131)$$

A partir destes valores, pode concluir-se que o facto de considerar o efeito da influência de absorção de radiação solar no Lago leva a que seja necessário menos sal para manter a zona gradiente não convectiva, em comparação com a quantidade apontada pela análise de Veronis. Os resultados de Veronis são, pois, mais restritivos do que os obtidos para o Caso 1.

5.2.9 Conclusão

Num Lago Solar a absorção de radiação solar é fortemente responsável pela não linearidade do perfil de temperatura. Os estados marginais para a estabilidade da zona gradiente mostram neste caso que, para um mesmo gradiente de temperaturas, um lago mais transparente está menos sujeito a instabilidades de dupla difusão do que um lago menos transparente.

A consideração de geração interna de calor no Lago implica que os estados marginais sejam menos restritivos, em comparação com a análise de Veronis, a qual não prevê existência de absorção de radiação. Como consequência, e de acordo com a análise agora efectuada, é necessária uma quantidade de sal inferior para impedir a formação de correntes de convecção na zona gradiente.

A análise não linear abordada, em termos de visualização gráfica das soluções obtidas numericamente a partir do sistema de equações diferenciais não lineares, aponta para resultados análogos aos resultados provenientes da análise linear.

5.3 Coeficientes de difusão variáveis (Caso 2)

Na secção anterior, avaliou-se a contribuição da absorção de radiação solar na para a estabilidade da zona gradiente do Lago e verificou-se que a consideração dessa contribuição conduzia a um problema com condições de fronteira de Neumann para a temperatura e condições de fronteira de Dirichlet, para a salinidade. Da análise efectuada ressaltou a não linearidade do perfil de temperatura e a linearidade do perfil de salinidade. Concluiu-se, pois, que a situação analisada (Caso 1) é insuficiente para caracterizar de uma forma correcta a zona gradiente do Lago, uma vez que não traduz a não linearidade do perfil de salinidade, observada experimentalmente.

Como já se referiu no Capítulo 2, existem fenómenos de transferência de calor e massa na zona gradiente que podem conduzir esta zona a uma situação instável, uma vez que a temperatura se difunde muito mais rapidamente do que o cloreto de sódio. Na realidade sendo os coeficientes de difusão térmica e molecular variáveis com a profundidade e havendo um deles cujo valor é 100 vezes superior ao valor do outro, é natural que o fenómeno de dupla difusão liderado pela componente que possui maior coeficiente de difusão vá influenciar o comportamento da zona gradiente, em termos de estabilidade.

O Caso 2, que se apresenta nesta secção, analisa precisamente o efeito da existência de coeficientes de difusão variáveis admitindo, ao contrário do Caso 1, que não existe geração interna de calor na camada. Esta hipótese, ausência de geração interna de calor, põe-se para melhor isolar o efeito da variação dos coeficientes de difusão térmica e salina.

Seja pois o sistema (5.1)-(5.5) onde a geração interna de calor vem dada por $\dot{q} = 0$, na equação (5.3). Os estados estacionários da temperatura e da salinidade obtêm-se de (5.3) e de (5.4) considerando a velocidade e as derivadas temporais nulas, situação que conduz respectivamente a:

$$\nabla \cdot (K_T \nabla T(z)) = 0 \quad (5.132)$$

$$\nabla \cdot (K_S \nabla S(z)) = 0 \quad (5.133)$$

Em relação às condições de fronteira, considera-se que as zonas adjacentes à zona gradiente têm uma capacidade infinita, possuindo a zona de armazenamento uma temperatura constante T_0 e uma concentração salina constante S_0 , e a zona superficial uma temperatura constante T_d e uma concentração salina constante S_d . Esta hipótese permite impor condições de Dirichlet para a temperatura e para a salinidade. Vem pois:

$$T|_{z=d} = T_d, \quad T|_{z=0} = T_0 \quad (5.134)$$

$$S|_{z=d} = S_d, \quad S|_{z=0} = S_0 \quad (5.135)$$

5.3.1 Soluções estacionárias: dependência dos coeficientes de difusão

De acordo com a hipótese posta para o Caso 2, nas equações dadas por (5.132)-(5.133), os coeficientes de difusão térmica e salina são considerados variáveis.

Estas equações não explicitam, contudo, qual a dependência de K_T e de K_S . Esta é na realidade, difícil de estabelecer, uma vez que ambos os coeficientes são função da temperatura e da salinidade e, em última análise, da profundidade.

Variação dos coeficientes de difusão

De acordo com vários autores, entre os quais Zangrando (1991), os coeficientes de difusão variam com a profundidade z , isto é, $K_T = f_1(z)$ e $K_S = f_2(z)$. Nesta perspectiva, os coeficientes de difusão térmica e salina nas fronteiras são dados por:

$$K_{T_0} = K_T(z)\Big|_{z=0}, \quad K_{T_d} = K_T(z)\Big|_{z=d} \quad (5.136)$$

$$K_{S_0} = K_S(z)\Big|_{z=0}, \quad K_{S_d} = K_S(z)\Big|_{z=d} \quad (5.137)$$

e considera-se uma dependência linear de K_T e de K_S com a profundidade z de acordo com as expressões:

$$K_T(z) = K_{T_0} + (K_{T_d} - K_{T_0}) \frac{z}{d} \quad (5.138)$$

$$K_S(z) = K_{S_0} + (K_{S_d} - K_{S_0}) \frac{z}{d} \quad (5.139)$$

Observe-se que foram efectuadas diferentes aproximações de K_T e K_S com z . Optou-se por considerar a aproximação linear uma vez que todas as outras conduziam a soluções estacionárias complexas, não trazendo qualquer contribuição à análise a efectuar.

Introduzindo as relações (5.138)-(5.139) nas equações dos estados estacionários dadas por (5.132)-(5.133) obtém-se, como solução estacionária para a temperatura e para a salinidade:

$$T_s(z) = T_0 + \frac{T_d - T_0}{\ln(K_{T_d}/K_{T_0})} \ln \left(1 + \left(\frac{K_{T_d}}{K_{T_0}} - 1 \right) \frac{z}{d} \right) \quad (5.140)$$

$$S_s(z) = S_0 + \frac{S_d - S_0}{\ln(K_{S_d}/K_{S_0})} \ln \left(1 + \left(\frac{K_{S_d}}{K_{S_0}} - 1 \right) \frac{z}{d} \right) \quad (5.141)$$

Obs. 5.3.1 *Note-se que fazendo $K_{T_d} \rightarrow K_{T_0}$ e $K_{S_d} \rightarrow K_{S_0}$ nas equações (5.140)-(5.141) se recuperam os perfis do modelo proposto por Costa et al. (1981).*

A Figura 5.11 e a Figura 5.12 exibem as soluções estacionárias (5.140)-(5.141) obtidas para os valores típicos que constam da Tabela 5.3.

$d=1$ m	
$T_d=20$ °C	$K_{T_d}=1.43 \times 10^{-7}$ m ² s ⁻¹
$T_0=100$ °C	$K_{T_0}=1.73 \times 10^{-7}$ m ² s ⁻¹
$S_d=0$ ‰	$K_{S_d}=1.39 \times 10^{-9}$ m ² s ⁻¹
$S_0=20$ ‰	$K_{S_0}=5.94 \times 10^{-9}$ m ² s ⁻¹

Tabela 5.3: Valores típicos de Temperatura e Concentração Salina

Da análise destas Figuras ressalta que, embora o perfil de salinidade seja claramente não linear, o perfil de temperatura é quase linear, ao contrário do perfil obtido no Caso 1, (ver a Figura 5.2). Este facto será referido mais á frente.

Antes de se passar à formulação do problema de dupla difusão da zona gradiente, considerando as equações estacionárias obtidas, importa tecer alguns comentários ao tipo de expressões propostas para K_T e K_S .

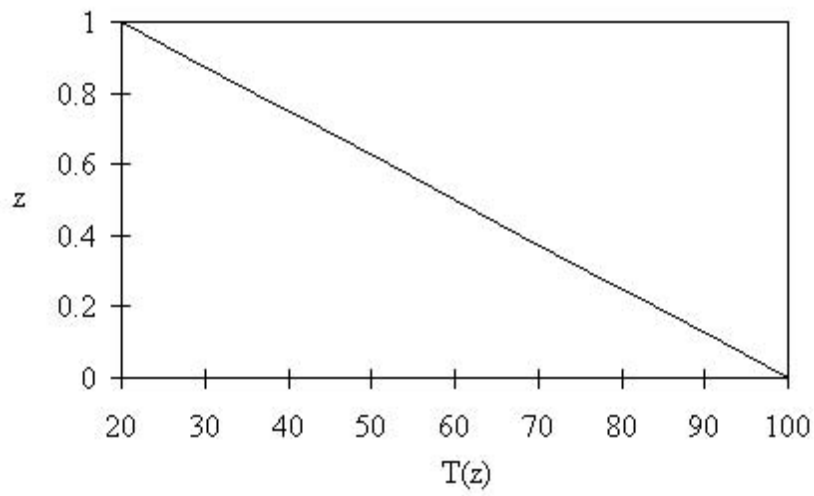


Figura 5.11: Perfil de temperatura (Caso 2)

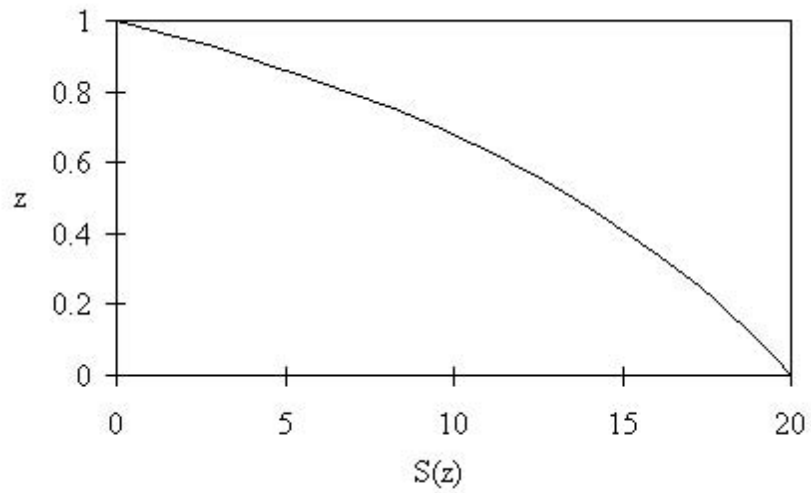


Figura 5.12: Perfil de salinidade (Caso 2)

Validação da aproximação proposta para K_T e K_S

As expressões propostas para as difusibilidades térmica e salina, dadas por (5.138) e (5.139), uma vez introduzidas nas equações dos estados estacionários da temperatura e da salinidade, conduzem a expressões para $T_s(z)$ e $S_s(z)$ que correspondem a perfis não lineares. No entanto, quer o coeficiente de difusão da temperatura, quer o coeficiente de difusão da salinidade, são simultaneamente função da temperatura e da salinidade, motivo pelo qual existe a necessidade de validar a aproximação considerada, onde se admitiu que K_T e K_S são função da profundidade z .

Esta validação implica fazer uma análise da variação dos coeficientes de difusão com a temperatura e com a salinidade. Ora, a temperatura pode variar, tipicamente, na zona gradiente entre os 5 °C e os 100 °C e a concentração salina entre 0% e 20%.

Efectuando uma aproximação de mínimos quadrados aos valores de K_T e K_S , que constam da "International Critical Values" (?) correspondentes aos intervalos [5 °C, 100 °C] de variação da temperatura e [0%, 20%] de variação da concentração salina obtém-se:

$$K_T(T, S_w) = (1.33 + 0.00563T - 0.00002T^2 + 0.00603S_w - 0.00019S_w^2) \times 10^{-7} \quad (5.142)$$

$$K_S(T, S_w) = (8.16 + 0.255T + 0.00254T^2 - 0.28S_w + 0.0147S_w^2) \times 10^{-10} \quad (5.143)$$

onde S_w denota o valor da concentração salina em percentagem mássica, isto é $S_w = S/\rho \times 100$. Tanto K_T como K_S apresentam uma dependência quadrática em T e S_w , a qual pode ser vista na Figura 5.13.

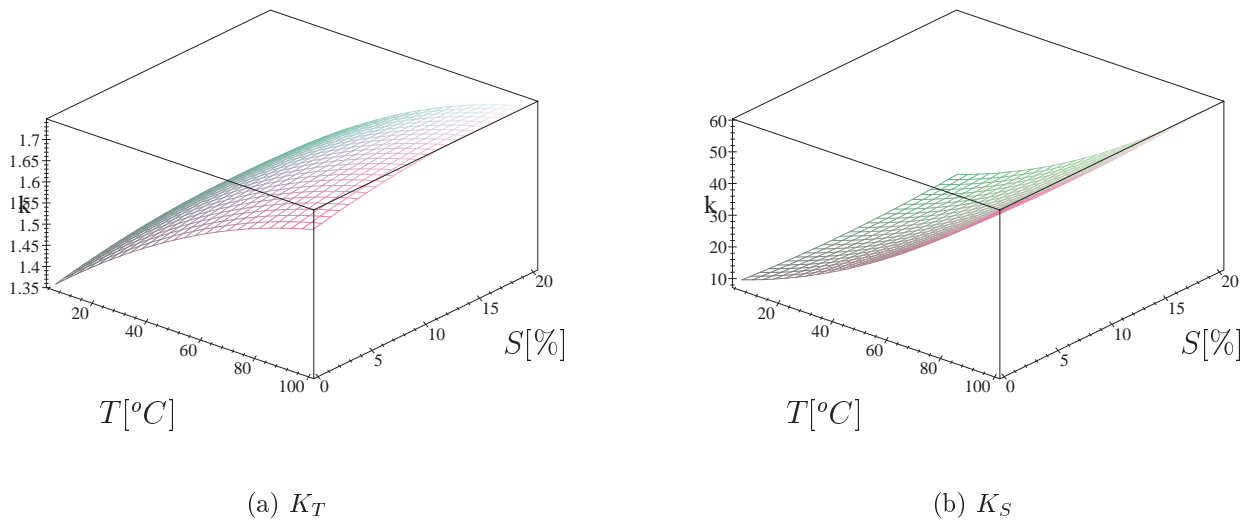


Figura 5.13: Variação de K_T e K_S com T e S

A determinação analítica das soluções estacionárias para a temperatura e para a salinidade utilizando as expressões dadas por (5.142)-(5.143) é contudo, impraticável, o que implica abordar o problema de outra forma. Ora, o problema pode ser resolvido numericamente, escrevendo as equações dos estados estacionários dadas por (5.132)-(5.133) na

forma:

$$K_T(T, S) \frac{\partial T}{\partial z} = C_1 \quad (5.144)$$

$$K_S(T, S) \frac{\partial S}{\partial z} = C_2 \quad (5.145)$$

com C_1 e C_2 constantes de integração. A partir destas equações, as soluções para K_T e K_S) como função de z são obtidas utilizando, por exemplo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

A necessidade de se respeitarem as condições de fronteira impostas aos estados estacionários da temperatura e da salinidade, implica uma ligeira alteração na aplicação deste método empregando-se um processo de "shooting", por forma a garantir as condições de Dirichlet impostas a T e a S , no ajuste das constantes de integração. As curvas $K_T(T, S_w)$ e $K_S(T, S_w)$ podem ser ajustadas a funções quadráticas em z , dadas por:

$$K_T = (1.7319473 - 0.04740486z - 0.23631973z^2) \times 10^{-7} \quad (5.146)$$

$$K_S = (5.9608745 - 6.250911z + 1.652486z^2) \times 10^{-9} \quad (5.147)$$

as quais se mostram nas Figuras 5.14 e 5.15. Facilmente se constata que as Figuras 5.14

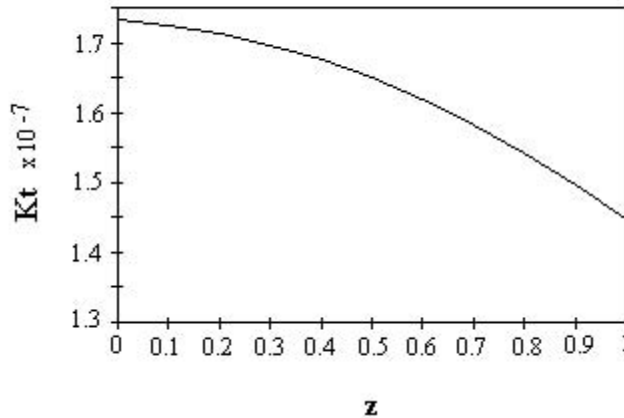


Figura 5.14: Variação quadrática de K_T com z

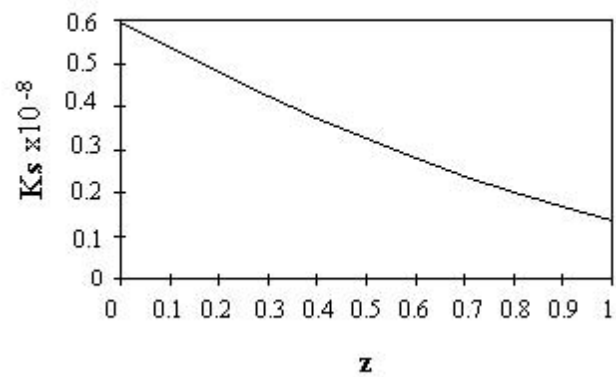
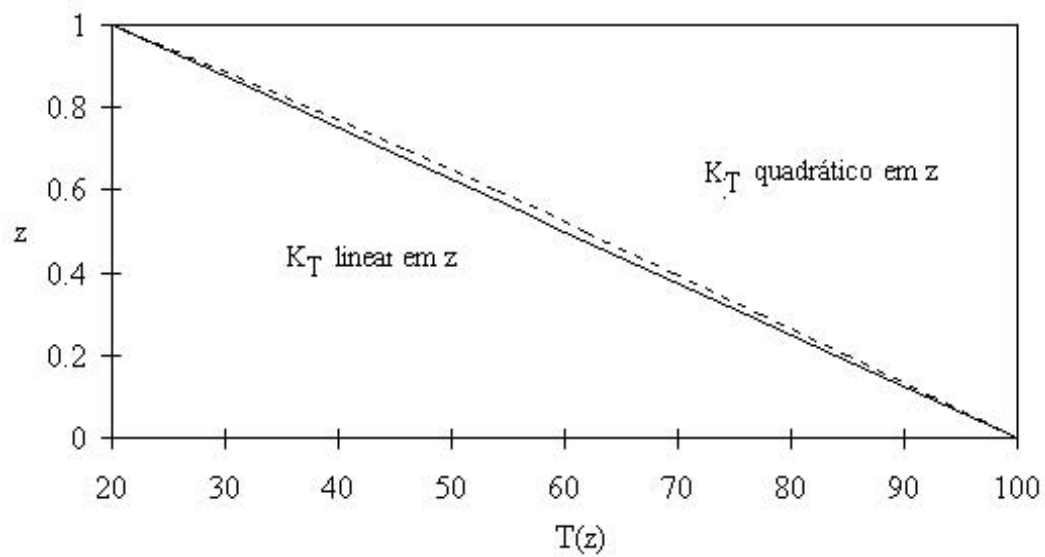
e 5.15 apresentam uma variação para os coeficientes de difusão como função quadrática de z , muito próxima da variação realçada na Figura 5.13 onde os coeficientes são função da temperatura e da salinidade.

As soluções estacionárias para a temperatura e para a salinidade, com K_T e K_S escritos como funções quadráticas em z , obtém-se analiticamente de (5.132)-(5.133) utilizando as relações (5.146) e (5.147), vindo:

$$T_s(z) = -203.0656249 \operatorname{arctanh}(0.3691346365z + 0.03702351844) + 107.5216419 \quad (5.148)$$

$$S_s(z) = -198.9594401 \operatorname{arctan}(5.778149926z - 10.92859514) - 274.3619146 \quad (5.149)$$

As Figuras 5.16 e 5.17 mostram que estes perfis, que consideram uma variação quadrática de K_T e K_S com a profundidade z , praticamente coincidem com os perfis dados pelas equações (5.140)-(5.141), os quais foram obtidos analiticamente admitindo para K_T e K_S uma variação linear com a profundidade z .

Figura 5.15: Variação quadrática de K_S com z Figura 5.16: Perfil de temperatura considerando K_T como função quadrática de z

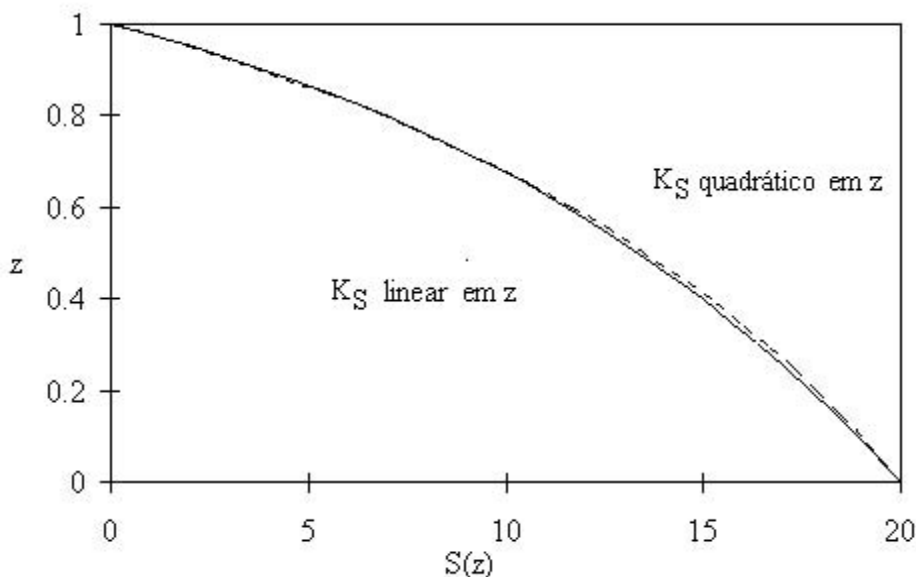


Figura 5.17: Perfil de salinidade considerando K_S como função quadrática de z

As soluções estacionárias para a temperatura e para a salinidade praticamente coincidem quer se considere K_T e K_S como funções lineares em z , quer se admita K_T e K_S com uma variação quadrática em z . Esta constatação justifica a utilização das relações propostas para os coeficientes de difusão.

5.3.2 Formulação do problema de dupla difusão

A hipótese de coeficientes de difusão variáveis implica que K_T e K_S figurem como função de z , não podendo permutar com o operador gradiente no termo difusivo das equações (5.3) e (5.4).

Tendo em conta estas hipóteses, adicionam-se às soluções estacionárias (5.140) e (5.141) as funções de perturbação. As soluções obtidas desta forma são introduzidas no sistema (5.1)-(5.5). Neste sistema as difusibilidades são adimensionalizadas pelos respectivos valores médios, no domínio $[0, d]$, vindo:

$$\overline{K}_T = \frac{1}{d} \int_0^d K_T(z) dz \quad (5.150)$$

$$\overline{K}_S = \frac{1}{d} \int_0^d K_S(z) dz \quad (5.151)$$

isto é:

$$\hat{K}_T = \frac{K_T}{\overline{K}_T}, \quad \hat{K}_S = \frac{K_S}{\overline{K}_S} \quad (5.152)$$

O sistema de equações que resulta da introdução das soluções propostas (soluções estacionárias adicionadas a funções de perturbação) e da adimensionalização efectuada é dado

por:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} - J(\hat{\psi}, \hat{T}) + f(\hat{z}) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} = \hat{\nabla} \cdot (\hat{K}_T(\hat{z}) \hat{\nabla} \hat{T}) \quad (5.153)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{t}} - J(\hat{\psi}, \hat{S}) + g(\hat{z}) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\overline{K}_T}{\overline{K}_S} \hat{\nabla} \cdot (\hat{K}_S(\hat{z}) \hat{\nabla} \hat{S}) \quad (5.154)$$

$$\left(\frac{1}{\overline{Pr}} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \right) \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} = -\overline{R}_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \overline{R}_s \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\overline{Pr}} J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \quad (5.155)$$

com

$$f(\hat{z}) = \frac{K_{T_d} - K_{T_0}}{\ln(K_{T_d}/K_{T_0})(K_{T_0} - (K_{T_d} - K_{T_0})\hat{z})} \quad (5.156)$$

$$g(\hat{z}) = \frac{K_{S_d} - K_{S_0}}{\ln(K_{S_d}/K_{S_0})(K_{S_0} - (K_{S_d} - K_{S_0})\hat{z})} \quad (5.157)$$

Os números de Rayleigh térmico e salino \overline{R}_T e \overline{R}_s e o número de Prandtl \overline{Pr} obtém-se considerando os valores médios de K_T e K_S , vindo:

$$\overline{R}_T = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\overline{K}_T\nu}, \quad \overline{R}_s = \frac{g\beta\Delta S d^3}{\overline{K}_T\nu}, \quad \overline{Pr} = \frac{\nu}{\overline{K}_T} \quad (5.158)$$

5.3.3 Formulação fraca

A formulação fraca do sistema (5.153)-(5.154), considerando φ_i , ξ_i e ϖ_i como funções tentativa para a temperatura, salinidade e velocidade, respectivamente, conduz às relações:

Temperatura

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (K_T(z) \nabla (a_i \varphi_i))) \varphi_j d\Omega \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned} (f, \varphi_j) &= - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial (a_i \varphi_i)}{\partial t} - J((c_i \varpi_i), (a_i \varphi_i)) \right. \\ &\quad \left. + f(z) \frac{\partial (c_i \varpi_i)}{\partial x} a(\exp(\mu z) - f_r) \right\} \varphi_j d\Omega \end{aligned} \quad (5.160)$$

$$\forall \varphi_j \in U_{n_1}, \quad j = 1, 2.$$

Salinidade

$$a(\xi_i, \xi_j) = \int_{\Omega} \left(-\frac{\overline{K}_T}{\overline{K}_S} \nabla \cdot (K_S(z) \nabla (b_i \xi_i)) \right) \xi_j d\Omega \quad (5.161)$$

$$(f, \xi_j) = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (b_i \xi_i)}{\partial t} - J((c_i \varpi_i), (b_i \xi_i)) + g(z) \frac{\partial (c_i \varpi_i)}{\partial x} \right) \xi_j d\Omega \quad (5.162)$$

$$\forall \xi_j \in U_{n_2}, \quad j = 1, 2.$$

Velocidade

$$a(\varpi_i, \varpi_j) = -\frac{1}{Pr} \int_{\Omega} (-\Delta(c_i \varpi_i) \cdot \Delta \varpi_j) d\Omega \quad (5.163)$$

$$(f, \varpi_j) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{Pr} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla((c_i \varpi_i) \cdot \nabla \varpi_j)) \right) + J((c_i \varpi_i), \nabla^2(c_i \varpi_j)) \right) - \left(\overline{R}_T \frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial x} - \overline{R}_S \frac{\partial(b_i \xi_i)}{\partial x} \right) \right\} \varpi_j d\Omega \quad (5.164)$$

$\forall \varpi_j \in U_{n_3}$ com $j = 1$.

Utilizando para φ_i , ξ_i e ϖ_i as funções tentativa propostas para o Caso 1 obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias nas variáveis $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $c_1(t)$ dado por:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -10a_1 + \frac{\pi}{14\lambda} c_1 a_2 \\ \dot{a}_2 = -\frac{2}{\lambda} L_2 a_2 - \frac{\pi}{\lambda} [C + \frac{a_1}{7}] c_1 \\ \dot{b}_1 = -10 \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} b_1 + \frac{\pi}{14\lambda} c_1 b_2 \\ \dot{b}_2 = -\frac{2}{\lambda} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} L_2 b_2 - \frac{\pi}{\lambda} [S_1 + \frac{b_1}{7}] c_1 \\ \dot{c}_1 = -2\overline{Pr} L_1 L_3 c_1 - \frac{7}{4} \pi \overline{Pr} L_1 \lambda (\overline{R}_T a_2 - \overline{R}_S b_2) \end{cases} \quad (5.165)$$

onde

$$C = (-15K_{T_d}^4 K_{T_0} - 20K_{T_d}^2 K_{T_0}^3 - 30K_{T_d} K_{T_0}^4 - 60K_{T_d}^2 K_{T_0} \ln(K_{T_d}) + 3K_{T_0}^5 + 60K_{T_d}^3 K_{T_0}^2 + 2K_{T_d}^5 + 60K_{T_d}^2 K_{T_0}^3 \ln(K_{T_0})) / (\ln(K_{T_d} - \ln(K_{T_0}))(K_{T_0} - K_{T_d})^5) \quad (5.166)$$

$$S_1 = (-15K_{S_d}^4 K_{S_0} - 20K_{S_d}^2 K_{S_0}^3 - 30K_{S_d} K_{S_0}^4 - 60K_{S_d}^2 K_{S_0} \ln(K_{S_d}) + 3K_{S_0}^5 + 60K_{S_d}^3 K_{S_0}^2 + 2K_{S_d}^5 + 60K_{S_d}^2 K_{S_0}^3 \ln(K_{S_0})) / (\ln(K_{S_d} - \ln(K_{S_0}))(K_{S_0} - K_{S_d})^5) \quad (5.167)$$

5.3.4 Análise de estabilidade

Análise linear de estabilidade

Utilizando o procedimento empregue para o Caso 1 e propondo soluções do tipo $A_i \exp(\sigma t)$, o sistema (5.165)-(5.165) após linearização em torno da origem pode ser escrito em notação matricial, vindo:

$$\begin{bmatrix} \overline{Pr} L_1 L_3 + \sigma & 0 & \frac{7}{4} \overline{Pr} L_1 \pi \lambda \overline{R}_T & 0 & -\frac{7}{4} \overline{Pr} L_1 \pi \lambda \overline{R}_S \\ 0 & 10 + \sigma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda} C & 0 & \frac{2}{\lambda} L_2 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} + \sigma & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda} S_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} L_2 + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.168)$$

O polinómio característico associado é dado por:

$$p_5(\sigma) = (\sigma + 10)(\sigma + 10 \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T}) (\sigma^3 + \sigma^2 D_1 + \sigma D_2 + D_3) \quad (5.169)$$

com

$$D_1 = \frac{2L_2}{\lambda} \left(1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} \right) + 2\overline{P}_r L_1 L_3 \quad (5.170)$$

$$D_2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2 \overline{K}_S}{\lambda \overline{K}_T} + \left(1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} \right) \overline{P}_r L_1 L_3 \right) + \frac{7}{4} \pi^2 \overline{P}_r L_1 (\overline{R}_s - C \overline{R}_T) \quad (5.171)$$

$$D_3 = \frac{8\overline{P}_r L_1 L_2^2 L_3 \overline{K}_S}{\lambda^2 \overline{K}_T} + \frac{7\pi^2}{2\lambda} \left(\overline{P}_r L_1 L_2 (\overline{R}_s - \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} C \overline{R}_T) \right) \quad (5.172)$$

Efectuando uma análise espectral análoga à realizada no Caso 1 obtêm-se os seguintes estados de estabilidade marginal:

1. Estado marginal para o início de movimento estacionário;

$$\overline{R}_T = \left(\frac{S_1}{C} \right) \left(\frac{1}{\overline{\tau}} \right) \overline{R}_s + \frac{16}{7} \frac{L_3 L_2}{\pi^2 C \lambda} \quad (5.173)$$

2. Estado marginal para o início de movimento oscilatório;

$$\overline{R}_T = \left(\frac{S_1}{C} \right) \left(\frac{\overline{\tau} F + \overline{P}_r}{F + \overline{P}_r} \right) \overline{R}_s + \frac{16}{7} \frac{L_2 (\overline{\tau} + 1) [\overline{\tau} F + \overline{P}_r]}{\pi^2 C \overline{P}_r \lambda^2 L_1} \quad (5.174)$$

onde

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T}, \quad F = \frac{L_2}{\lambda L_1 L_3} \quad (5.175)$$

A frequência de oscilação vem dada por:

$$\omega_0^2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2 \overline{K}_S}{\lambda \overline{K}_T} + \overline{P}_r L_1 L_3 \left(1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} \right) \right) + \frac{7}{4} \pi^2 \overline{P}_r L_1 (S_1 \overline{R}_s - C \overline{R}_T) \quad (5.176)$$

Neste caso o valor de λ que minimiza o termo independente do segundo membro da relação 5.176:

$$\lambda = 2.131 \quad (5.177)$$

Considerando os valores típicos para o caso do Lago Solar dados pela Tabela 5.4 as equações dos estados marginais vêm:

$$\overline{R}_T = 42.49 \overline{R}_s + 1795.8 \quad (5.178)$$

$$\overline{R}_T = 0.868 \overline{R}_s + 1843.4 \quad (5.179)$$

sendo a zona do plano (R_s, R_T) onde ocorre movimento oscilatório delimitada pela intersecção dos semi-planos dados por:

$$\overline{R}_T > 0.868 \overline{R}_s + 1843.4 \quad (5.180)$$

$$\overline{R}_T < 0.985 \overline{R}_s + 1843.2 \quad (5.181)$$

Da análise da Figura 5.18 conclui-se que a zona de transição é praticamente inexistente, não havendo pois movimento oscilatório entre a situação de condução e a situação de convecção estacionária.

\overline{K}_S	$= 3.665 \times 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
\overline{K}_T	$= 1.58 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
\overline{Pr}	$= 4.11$
$\overline{\tau}$	$= 0.02319$

Tabela 5.4: Valores típicos de \overline{K}_T , \overline{K}_S , \overline{Pr} e $\overline{\tau}$

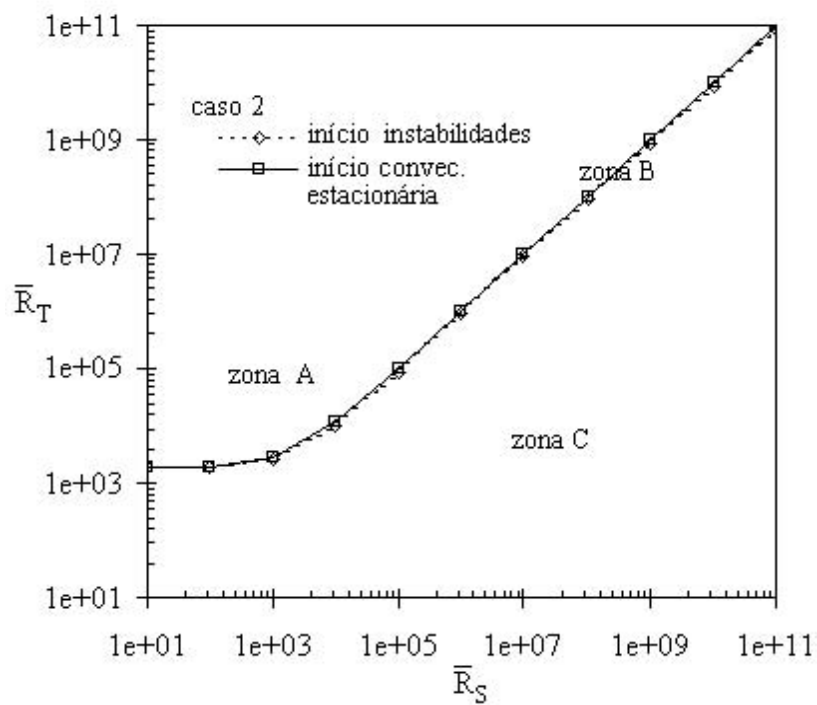


Figura 5.18: Frequência de oscilação e início de instabilidades: Ini. Inst. Eqs.:(5.180), Freq. Osc. Eq.:(5.181)

5.3.5 Análise não linear de estabilidade

A solução obtida, a partir da resolução numérica do sistema (5.165) utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, aponta para resultados comprovativos dos obtidos através da análise linear.

A Figura 5.19 mostra um ponto situado na Zona A correspondente a uma situação

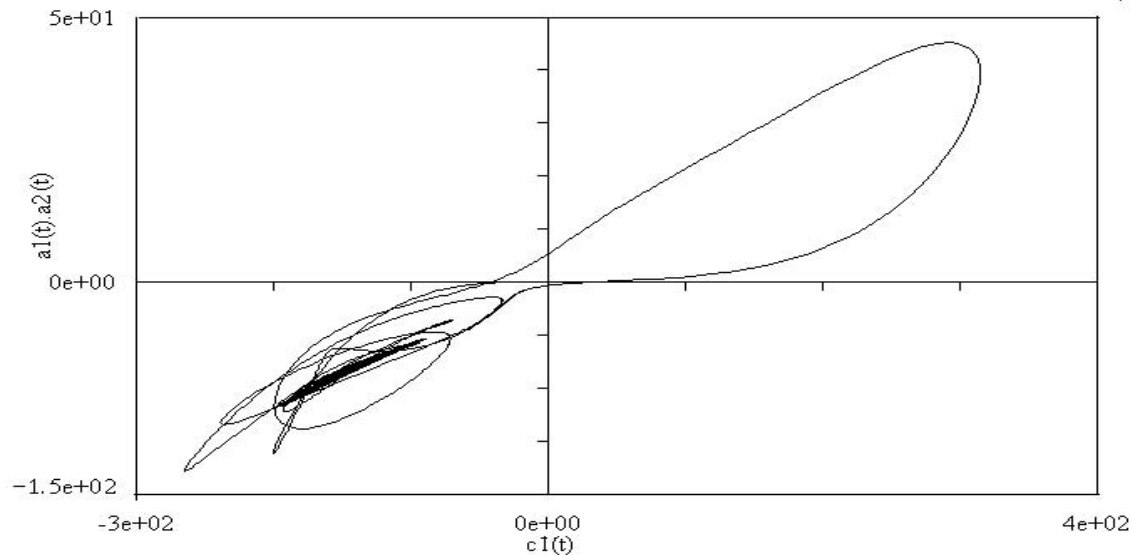


Figura 5.19: Zona A: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)

de convecção estacionária. Após uma espiral obtém-se um ponto de velocidade constante diferente de zero. A Figura 5.20 corresponde a um ponto situado na Zona B, exibindo movimento aperiódico que finaliza num atractor tipo poço. A Figura 5.21 mostra um ponto situado na Zona C, traduzindo uma situação estável correspondendo a um regime difusivo puro (o movimento tende para um ponto de velocidade nula).

5.3.6 Comparação do Caso 2 com a análise de Veronis

Os resultados obtidos, considerando o efeito da variação dos coeficientes de difusão, para valores típicos dos números de Rayleigh, são análogos aos obtidos por Veronis, o qual considerou coeficientes de difusão constantes.

Na Figura 5.22 apresentam-se as equações para o início do movimento oscilatório. A diferença mais acentuada entre os respectivos declives ocorre para valores baixos do número de Rayleigh, isto é para situações de camada com pouca concentração de sal ou com elevada viscosidade.

Perante a Figura 5.22 e atendendo aos valores dos declives das rectas (5.180) e (3.78), conclui-se que o facto de introduzir o efeito da variação das difusibilidades na análise de estabilidade da zona gradiente do Lago Solar conduz a resultados análogos aos previamente obtidos por Veronis, admitindo perfis lineares e coeficientes de difusão constantes.

5.3.7 Conclusão

A consideração de coeficientes de difusão variáveis para a temperatura e para a salinidade conduziu a uma situação de perfis não lineares. No entanto, os estados marginais de

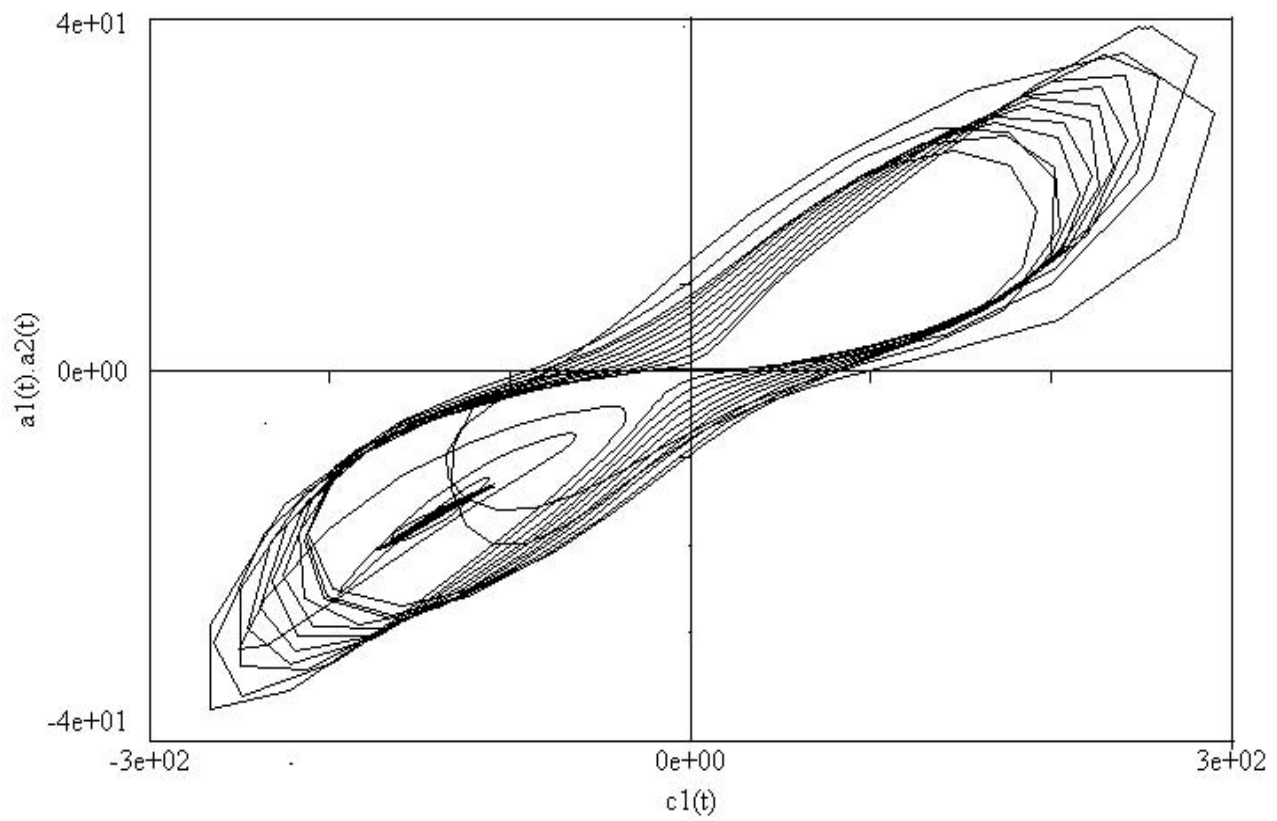


Figura 5.20: Zona B: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)

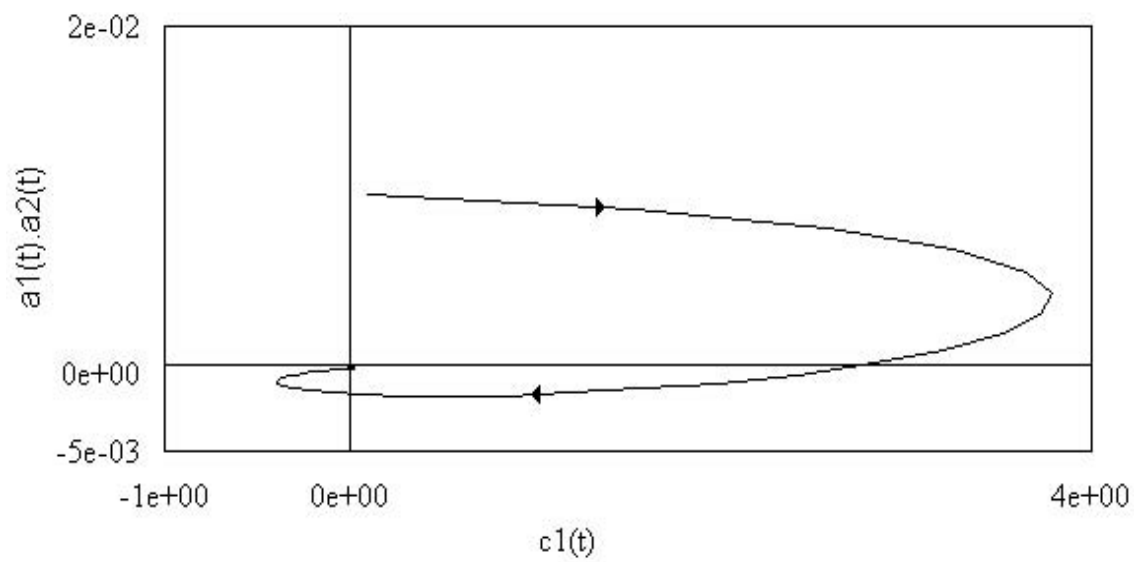


Figura 5.21: Zona C: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 2)

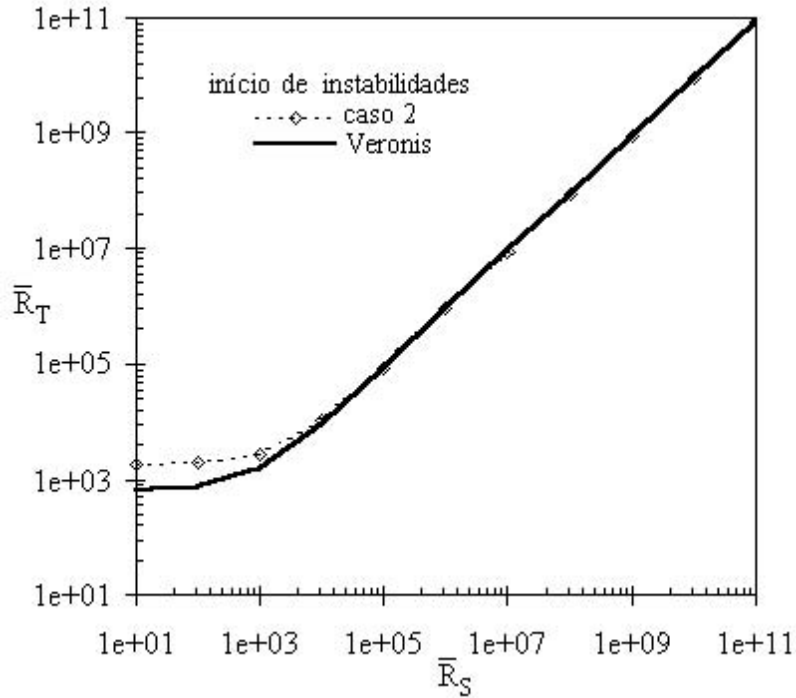


Figura 5.22: Comparação do início de oscilações entre o Caso 2: Eq.:(5.180) e Veronis

estabilidade obtidos não se revelam mais restritivos do que os estados marginais obtidos por Veronis (1965).

A condição de não convecção, para os valores considerados na Tabela 5.4, é dada por:

$$\bar{R}_S > 1.152\bar{R}_T \quad (5.182)$$

mostrando que o valor do número de Rayleigh salino necessário para a não convectividade da zona gradiente é aproximadamente 15% superior do que o valor necessário quando não se consideram fenómenos de dupla difusão. Refira-se que efectuando a mesma análise para o caso de Veronis, considerando valores médios para o número de Prandtl, para o quociente das difusibilidades e para os números de Rayleigh térmico e salino, é-se conduzido à relação dada por:

$$\bar{R}_S > 1.23\bar{R}_T \quad (5.183)$$

A análise deste autor mantém-se mais restritiva do que a evidenciada pelo Caso 2, sendo necessário um maior gradiente de salinidade para manter a zona gradiente não convectiva (quando não se considera a existência de fenómenos de dupla difusão).

5.4 O efeito conjunto da absorção de radiação e de K_T e K_S variáveis (Caso 3)

Nos Casos 1 e 2 analisou-se de uma forma independente a contribuição da absorção de radiação solar e da variação dos coeficientes de difusão, na estabilidade da zona gradiente do Lago Solar. Observou-se que, enquanto no Caso 1, o facto de se ter considerado

a existência de geração interna de calor, conduziu a uma solução estacionária para a temperatura que evidencia a não linearidade do perfil de temperaturas, no Caso 2, por seu lado, a consideração da variação dos coeficientes de difusão térmica e salina evidenciou um perfil marcadamente não linear para a salinidade e um perfil quase linear para a temperatura.

O Caso 3 analisa o efeito conjunto da absorção de radiação solar e da variação dos coeficientes de difusão.

À semelhança das formulações anteriores, o sistema (5.1)-(5.5) serve de base ao desenvolvimento do modelo de dupla difusão. O termo de geração interna de calor contempla o efeito da absorção de radiação solar e os coeficientes de difusão, que figuram no termo de difusão, nas equações de conservação da energia e do sal, são função de z .

5.4.1 Solução estacionária da Temperatura e da Salinidade

O estado estacionário da temperatura obtém-se resolvendo a equação (5.3) com $\mathbf{v} = 0$ e as derivadas temporais nulas, ou seja, resolvendo a equação dada por:

$$\frac{\partial T_s}{\partial z} = -\frac{q''(z)}{K_T(z)\rho C_p} + \frac{C_3}{K_T(z)} \quad (5.184)$$

onde C_3 designa uma constante de integração. A equação (5.184) está sujeita às condições de fronteira

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=d} = -\frac{h_d(T_d - T_\infty)}{K_{T_d}\rho C_p} \quad (5.185)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{q''(0)}{K_{T_0}\rho C_p} \quad (5.186)$$

Na equação do estado estacionário, a condutividade da água dada por K_w deixou de ser constante figurando como função de z , vindo escrita em termos de $K_T(z)$, da densidade ρ e do calor específico C_p .

Por seu lado, as condições de fronteira, idênticas às do Caso 1, mostram o valor K_{T_d} tomado pelo coeficiente de difusão térmica na fronteira superior e o valor K_{T_0} tomado por K_T na fronteira inferior.

A partir da equação (5.184) e das condições de fronteira (5.185) e (5.186) resulta por integração, Giestas et al. (1997) o estado estacionário da temperatura, o qual é dado por:

$$T_s(z) = T_\infty - F_1 \exp\left(\frac{-K_{T_0}\mu d}{K_{T_d} - K_{T_0}}\right) [Ei(A_1(z)) - Ei(A_1(d))] + f_r F_1 \ln\left(1 + \frac{K_{T_0}}{K_{T_d}}\left(1 - \frac{z}{d}\right)\right) + \frac{q''}{h_d}(1 - \exp(-\mu d)f_r) \quad (5.187)$$

com

$$F_1 = \frac{q''d \exp(-\mu d)}{\rho C_p (K_{T_d} - K_{T_0})}, \quad A_1(z) = \mu \left(z + \frac{K_{T_0}d}{K_{T_d} - K_{T_0}} \right) \quad (5.188)$$

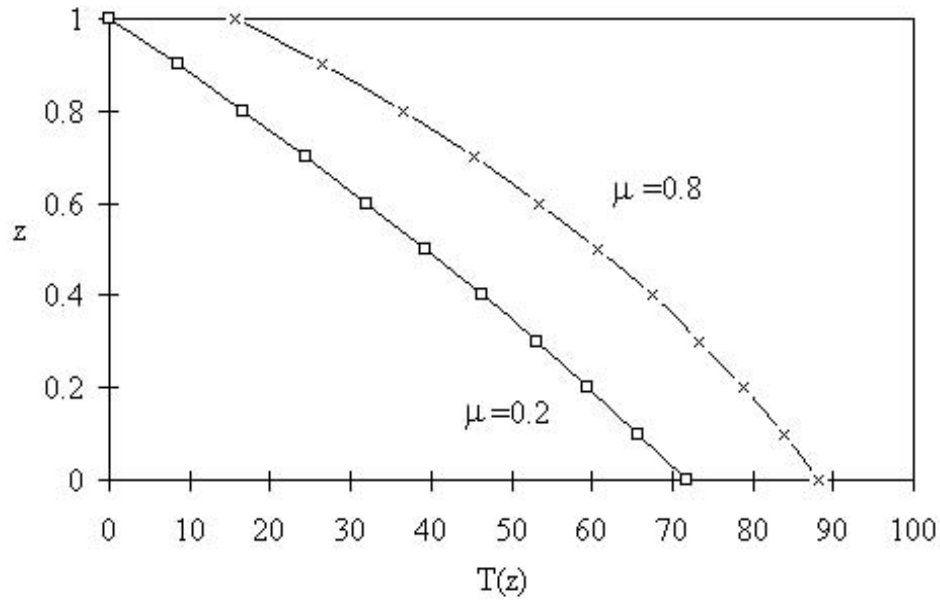


Figura 5.23: Perfil de temperatura (Caso 3)

e onde $Ei(x)$ é a função Integral Exponencial definida por:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt \quad (5.189)$$

A Figura 5.23 representa o perfil de temperatura, assim obtido, sendo evidente a sua não linearidade.

Obs. 5.4.1 Fazendo $K_{T_d} \rightarrow K_{T_0}$ e $K_{S_d} \rightarrow K_{S_0}$ na equação (5.187) obtém-se o perfil dado por (5.16), isto é recupera-se o perfil de temperatura obtido por no Caso 1.

A equação de conservação do sal reflecte a variação do coeficiente de difusão salina sendo igual à equação que serve de base ao Caso 2. Desta forma o estado estacionário da salinidade mantêm-se igual ao obtido no Caso 2, sendo traduzido pela equação (5.24) a qual está sujeita às condições de Dirichlet (5.22)-(5.23).

5.4.2 Formulação do problema de dupla difusão

Seguindo o mesmo processo de adimensionalização dos casos 1 e 2 e introduzindo as soluções estacionárias dadas por (5.187) e por (5.24), adicionadas às funções de perturbação usuais, no sistema de equações (5.1)-(5.5) é-se conduzido a:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} - J(\hat{\psi}, \hat{T}) + \hat{a} \left[\frac{\exp(\hat{\mu} \hat{z}) - f_e}{\hat{K}_{T_0} + (\hat{K}_{T_d} - \hat{K}_{T_0}) \hat{z}} \right] \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} = \hat{\nabla} \cdot (\hat{K}_T(z) \hat{\nabla} \hat{T}) \quad (5.190)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{t}} - J(\hat{\psi}, \hat{S}) + g(z) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\bar{K}_T}{\bar{K}_S} \hat{\nabla} \cdot (\hat{K}_S(z) \hat{\nabla} \hat{S}) \quad (5.191)$$

$$\left(\frac{1}{\bar{P}_r} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \right) \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} = -\bar{R}_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \bar{R}_s \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\bar{P}_r} J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \quad (5.192)$$

com

$$\hat{a} = \frac{d}{\Delta T} a, \quad a = \frac{-q'' d \exp(-\mu d)}{\rho C_p} \quad (5.193)$$

5.4.3 Formulação fraca para a Temperatura e para a Salinidade

Tomando φ_i , ξ_i e ϖ_i como funções tentativa para a temperatura, salinidade e velocidade respectivamente, a formulação fraca do sistema (5.190)-(5.192) traduz-se, $\forall \varphi_j \in U_{n_1}$, $j = 1, 2$, $\forall \xi_j \in U_{n_2}$, $j = 1, 2$ e $\forall \varpi_j \in U_{n_3}$, $j = 1$, em:

Temperatura

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (K_T(z) \cdot \nabla(a_i \varphi_i))) \varphi_j d\Omega \quad (5.194)$$

$$(f, \varphi_j) = - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(a_i \varphi_i)}{\partial t} - J((c_i \varpi_i), (a_i \varphi_i)) + \frac{\partial(c_i \varpi_i)}{\partial x} a \left(\frac{\exp(\mu z) - f_r}{K_{T_0} + (K_{T_d} - K_{T_0})z} \right) \right\} \varphi_j d\Omega \quad (5.195)$$

Salinidade

$$a(\xi_i, \xi_j) = \int_{\Omega} \left(-\frac{\overline{K}_T}{\overline{K}_S} \nabla \cdot (K_S(z) \cdot \nabla(b_i \xi_i)) \right) \xi_j d\Omega \quad (5.196)$$

$$(f, \xi_j) = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(b_i \xi_i)}{\partial t} - J((c_i \varpi_i), (b_i \xi_i)) + \left(g(z) \frac{\partial(c_i \varpi_i)}{\partial x} \right) \right) \xi_j d\Omega \quad (5.197)$$

A expressão para a velocidade é a mesma do Caso 2.

Utilizando as funções tentativa propostas nos Casos 1 e 2 obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -10a_1 + \frac{\pi}{14\lambda} c_1 a_2 \\ \dot{a}_2 = -\frac{2}{\lambda} L_2 a_2 - \frac{\pi}{\lambda} [\hat{a}P + \frac{a_1}{7}] c_1 \\ \dot{b}_1 = -10 \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} b_1 + \frac{\pi}{14\lambda} c_1 b_2 \\ \dot{b}_2 = -\frac{2}{\lambda} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} L_2 b_2 - \frac{\pi}{\lambda} [S_1 + \frac{b_1}{7}] c_1 \\ \dot{c}_1 = -2\overline{P}r L_1 L_3 c_1 - \frac{7}{4} \pi \overline{P}r L_1 \lambda (\overline{R}_T a_2 - \overline{R}_S b_2) \end{cases} \quad (5.198)$$

onde P é um polinómio em K_{T_0} , K_{T_d} e μ , o qual não se apresenta devido à sua extensão.

5.4.4 Análise de estabilidade

Análise linear de estabilidade

Linearizando o sistema (5.198) em torno da origem e propondo soluções do tipo $A_i \exp(\sigma t)$ é-se conduzido, de uma forma equivalente à das secções anteriores, ao sistema representado

matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \overline{Pr}L_1L_3 + \sigma & 0 & \frac{7}{4}\overline{Pr}L_1\pi\lambda\overline{R}_T & 0 & -\frac{7}{4}\overline{Pr}L_1\pi\lambda\overline{R}_s \\ 0 & 10 + \sigma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda}(\hat{a}P) & 0 & \frac{2}{\lambda}L_2 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10\frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} + \sigma & 0 \\ \frac{\pi}{\lambda}S_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda}\frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T}L_2 + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.199)$$

O polinómio característico associado a este sistema é dado por:

$$p_5(\sigma) = (\sigma + 10)(\sigma + 10\frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T})(\sigma^3 + \sigma^2D_1 + \sigma D_2 + D_3) \quad (5.200)$$

e tem como coeficientes:

$$D_1 = \frac{2L_2}{\lambda} \left(1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} \right) + 2\overline{Pr}L_1L_3 \quad (5.201)$$

$$D_2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2}{\lambda} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} + (1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T})\overline{Pr}L_1L_3 \right) + \frac{7}{4}\pi^2\overline{Pr}L_1(\overline{R}_s - (aP)\overline{R}_T) \quad (5.202)$$

$$D_3 = \frac{8\overline{Pr}L_1L_2L_3}{\lambda^2} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} + \frac{7\pi^2}{2\lambda}\overline{Pr}L_1L_2 \left(\overline{R}_s - (aP)\frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T}\overline{R}_T \right) \quad (5.203)$$

Os estados marginais de estabilidade obtidos por análise espectral são:

1. Estado marginal para o início de movimento estacionário

$$\overline{R}_T = \left(\frac{S_1}{\hat{a}P} \right) \left(\frac{1}{\tau} \right) \overline{R}_s + \frac{16}{7} \left(\frac{1}{\hat{a}P} \right) \frac{L_3L_2}{\pi^2\lambda} \quad (5.204)$$

2. Estado marginal para o início de movimento oscilatório

$$\overline{R}_T = \left(\frac{S_1}{\hat{a}P} \right) \left(\frac{\tau F + \overline{Pr}}{F + \overline{Pr}} \right) \overline{R}_s + \frac{16}{7} \left(\frac{1}{\hat{a}P} \right) \frac{L_2(\tau + 1)[\tau F + \overline{Pr}]}{\pi^2\overline{Pr}\lambda^2L_1} \quad (5.205)$$

A frequência angular de oscilação é dada por:

$$\omega_0^2 = \frac{4L_2}{\lambda} \left(\frac{L_2}{\lambda} \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T} + \overline{Pr}L_1L_3(1 + \frac{\overline{K}_S}{\overline{K}_T}) \right) + \frac{7}{4}\overline{Pr}L_1\pi^2 (S_1\overline{R}_s - (aP)\overline{R}_T) \quad (5.206)$$

Analisando as equações (5.204) e (5.205) observa-se que a dependência no coeficiente de difusão salino é dada através do parâmetro S_1 e que o efeito da absorção de radiação está expresso no factor $1/\hat{a}P$.

Estas equações, (5.204) e (5.205), particularizam-se para os valores da Tabela 5.4 e considerando $\mu = 0.8$, vindo:

$$\overline{R}_T = 27.5\overline{R}_s + 1160.9 \quad (5.207)$$

$$\overline{R}_T = 0.562\overline{R}_s + 34.35 \quad (5.208)$$

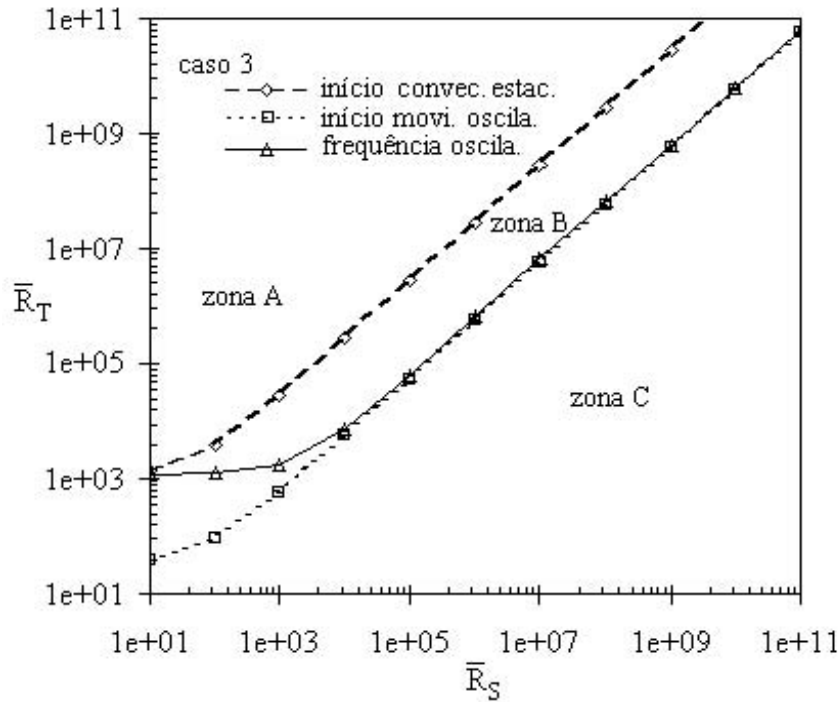


Figura 5.24: Estados de estabilidade marginal: Conv. Est. Eq.:(5.207), Ini. Inst. Eq.:(5.208) e Freq. Osc. Eq.:(5.209)

O semi-plano que delimita a zona onde ocorre movimento oscilatório é dado por:

$$\bar{R}_T < 0.63\bar{R}_s + 1191.5 \quad (5.209)$$

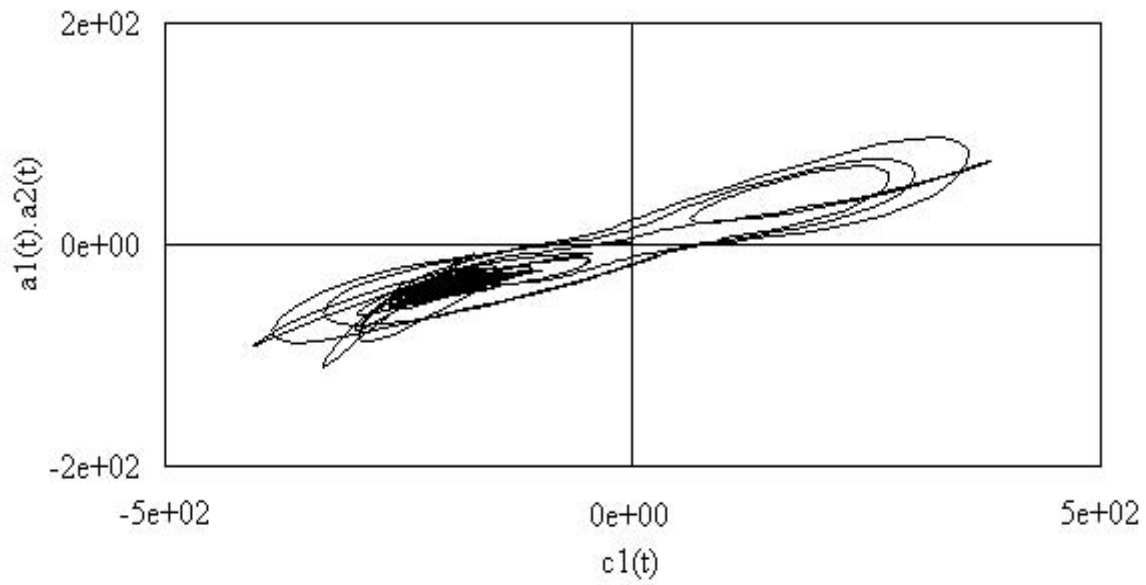
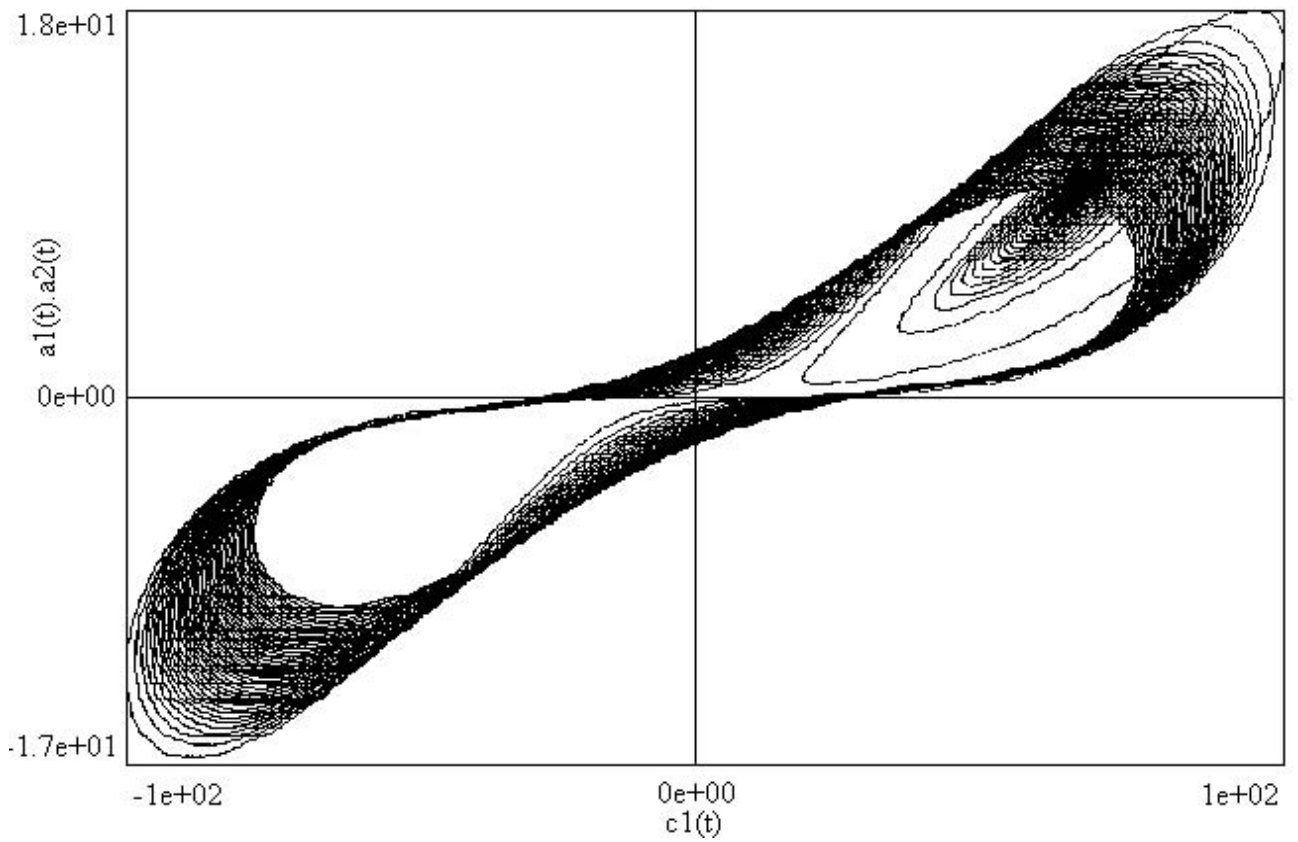
$$\bar{R}_T > 0.562\bar{R}_s + 34.35 \quad (5.210)$$

A Figura 5.24 mostra as relações dadas por (5.207), (5.208) e (5.209).

Como principal conclusão tem-se que as relações obtidas, considerando os dois efeitos i) absorção de radiação solar na camada, ii) variação nos coeficientes de difusão térmico e salino, conduzem a uma situação claramente mais restritiva do que quando se analisam os efeitos independentemente um do outro.

5.4.5 Análise não linear de estabilidade

As zonas delimitadas pelas equações (5.207), (5.208) e (5.209) apresentam as características apontadas pela Teoria Linear, como se pode observar nas Figuras 5.25 e 5.27. e 5.25. A primeira (Zona A) corresponde a uma solução de convecção estacionária exibindo um atrator do tipo poço, tendo a velocidade um valor constante diferente de zero. A Figura 5.26 corresponde a pontos situados na Zona B, correspondente a movimento oscilatório, o que está de acordo com o movimento aperiódico exibido pela figura. A Figura 5.27 mostra um ponto situado na Zona C correspondendo a uma solução estacionária tendendo a velocidade para zero (regime difusivo puro).

Figura 5.25: Zona A: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)Figura 5.26: Zona B: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)

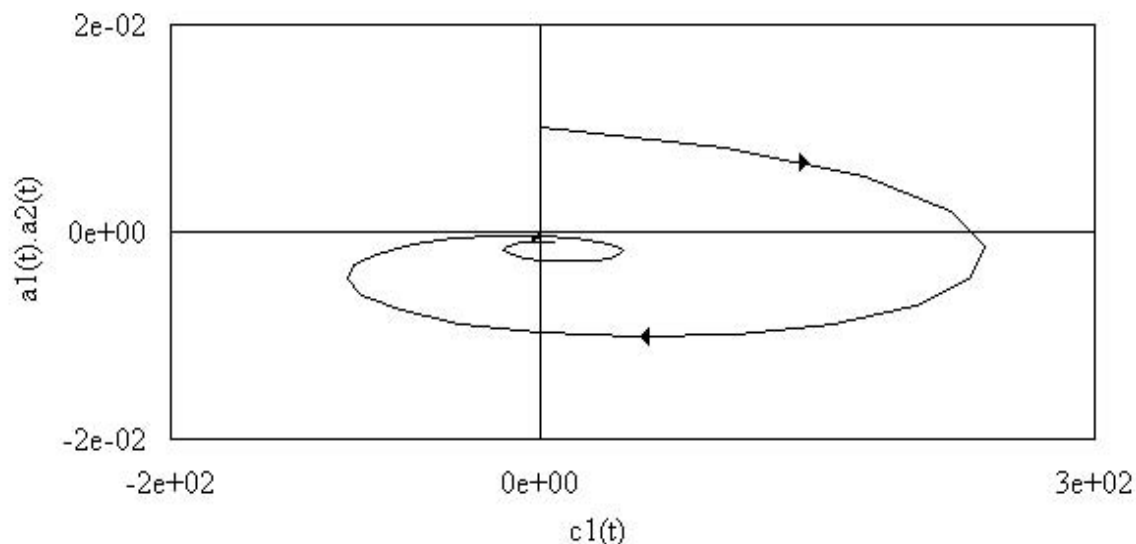


Figura 5.27: Zona C: $c_1(t)$ vs $a_1(t)a_2(t)$ (Caso 3)

5.4.6 Conclusão

A introdução do efeito de absorção de radiação solar na camada, modelada através do coeficiente de extinção μ , em conjunto com o facto das difusibilidades variarem com a profundidade z , conduziu a uma situação de estados marginais de estabilidade claramente mais restritivos do que os apontados por Veronis (1965).

Na presente situação é necessário um maior gradiente de salinidade para manter a zona gradiente não convectiva e conseqüentemente o Lago mais estável. Para $\mu = 0.8$ a condição de não convecção é dada por:

$$\bar{R}_S > 1.78\bar{R}_T \quad (5.211)$$

Desta forma o Caso 3 apresenta-se bastante mais restritivo uma vez que precisa de um maior gradiente salino para garantir a não convectividade da zona gradiente.

5.5 Análise comparativa dos resultados obtidos

5.5.1 Comparação dos sistemas de EDO's obtidos

Em relação à estrutura dos sistemas de equações diferenciais ordinárias obtidos, nas variáveis $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $c_1(t)$ podem tecer-se algumas considerações.

A primeira observação que se extrai da análise das formulações estabelecidas para o modelo de dupla difusão da zona gradiente é que os sistemas são do mesmo tipo para as diferentes formulações consideradas, isto é para os Casos 1,2 e 3 focados.

No Caso 1, que inclui geração interna de calor em consequência da absorção de radiação solar na camada, a segunda equação para a temperatura tem uma parcela diferente no termo cruzado, em comparação com a segunda equação representativa da salinidade. Esta parcela inclui a dependência no coeficiente de extinção μ à custa do qual foi modelado o andamento da absorção na camada.

No Caso 2, que contempla a variação dos coeficientes de difusão, sem inclusão do efeito de geração interna de calor, as equações da temperatura e da salinidade em $a_1(t)$, $a_2(t)$ e $b_1(t)$, $b_2(t)$ respectivamente, são praticamente idênticas, só diferindo na constituição dos polinômios intervenientes: nas equações da temperatura estes vêm dados em função de K_T e nas equações representativas da salinidade em termos de K_S .

Quando se consideram K_T e K_S constantes, recupera-se o sistema obtido por Costa et al. (1981), correspondente à situação de perfis lineares para a temperatura e para a salinidade.

O Caso 3 que inclui o efeito da absorção de radiação e da variação das difusibilidades, é obtido como que por "adição" dos modelos obtidos nos Casos 1 e 2, desacoplados. Assim, uma das parcelas do termo cruzado na segunda equação da temperatura (aP) inclui quer o efeito de absorção quer o efeito da variação das difusibilidades no polinômio P e na constante a . As restantes equações são, no entanto, iguais às do Caso 1.

5.5.2 Comparação de resultados dos Casos 2 e 3

Chandrasekhar (1961), Veronis (1965), Schechter et al. (1981) e Turner (1985) estabeleceram as bases para o estudo da estabilidade de fenómenos de dupla difusão. De uma forma geral, todos eles consideraram que a zona gradiente pode ser analisada como sendo constituída por uma camada de fluido aquecida por baixo na qual é imposto um perfil linear para a salinidade e onde se desenvolve um perfil de temperatura, igualmente linear. A situação prevista para a velocidade é de fronteiras livres.

No presente trabalho, a consideração do efeito da absorção de radiação solar e de coeficientes de difusão variáveis, na modelação da zona gradiente, conduziu à existência de perfis não lineares, quer para a temperatura, quer para a salinidade.

Com vista a efectuar uma análise comparativa entre os três Casos propostos e o Modelo de Veronis, torna-se necessário que todos os resultados sejam estabelecidos para os mesmos valores médios de R_T , R_S , Pr e τ . A Tabela 5.5 resume os resultados obtidos relativamente

	Veronis	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Início de Instabilidades	0.809	0.845	0.868	0.562
Início de convecção estacionária	43.16	41.44	42.49	27.52

Tabela 5.5: Declives das equações dos estados marginais

aos termos dependentes das curvas dos estados marginais. Da sua observação conclui-se que os resultados obtidos por Veronis em relação ao início de instabilidades são mais restritivos do que os resultados obtidos quando se analisa separadamente o efeito da absorção de radiação na camada ou o efeito da variação dos coeficientes de difusão da temperatura e salinidade.

A Figura 5.28 representa o início de instabilidade referente aos Casos 2 e 3 e à análise de Veronis.

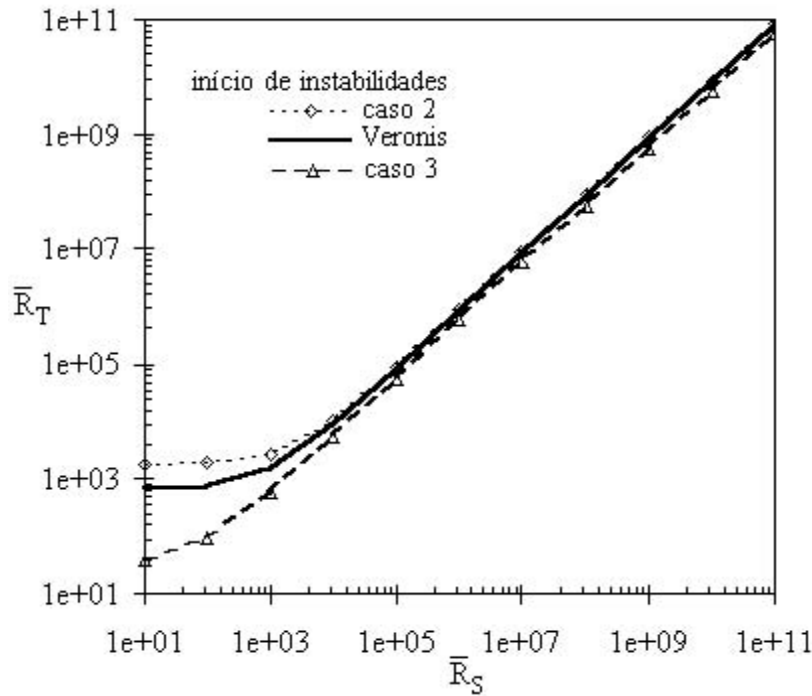


Figura 5.28: Início de instabilidades: Caso 2 Eq.: (5.180), Caso 3 Eq.:(5.208) e análise de Veronis

Em relação ao estado marginal de início de movimento convectivo estacionário pode-se concluir que os resultados obtidos por Veronis são menos restritivos do que os resultados que conjugam o efeito da variação das difusibilidades e da absorção de radiação solar na camada. Este resultado está claramente evidenciado na Figura 5.29 .

A Tabela 5.6 exhibe as relações que fornecem o critério de estabilidade para a zona

$\bar{R}_s > 1.23\bar{R}_T$	Modelo de Veronis
$\bar{R}_s > 1.18\bar{R}_T$	Caso 1
$\bar{R}_s > 1.15\bar{R}_T$	Caso 2
$\bar{R}_s > 1.77\bar{R}_T$	Caso 3

Tabela 5.6: Critério de estabilidade para a zona gradiente

gradiente considerando as diferentes situações. As relações desta Tabela mostram que o gradiente salino necessário à não convectividade da zona gradiente é bastante superior no Caso 3, apresentando-se este, conseqüentemente muito mais restritivo.

5.5.3 Comparação dos Casos 1, 2 e 3 com os resultados de Veronis

Uma análise que envolva os três casos estudados e o modelo proposto por Veronis implica retomar as equações dos estados marginais do Caso 1, para valores médios dos coeficientes de difusão, e dos números de Prandtl e de Rayleigh. No entanto, com base na Tabela 5.5, é possível fazer uma comparação desprezando os termos independentes dos segundos membros das equações dos estados marginais.

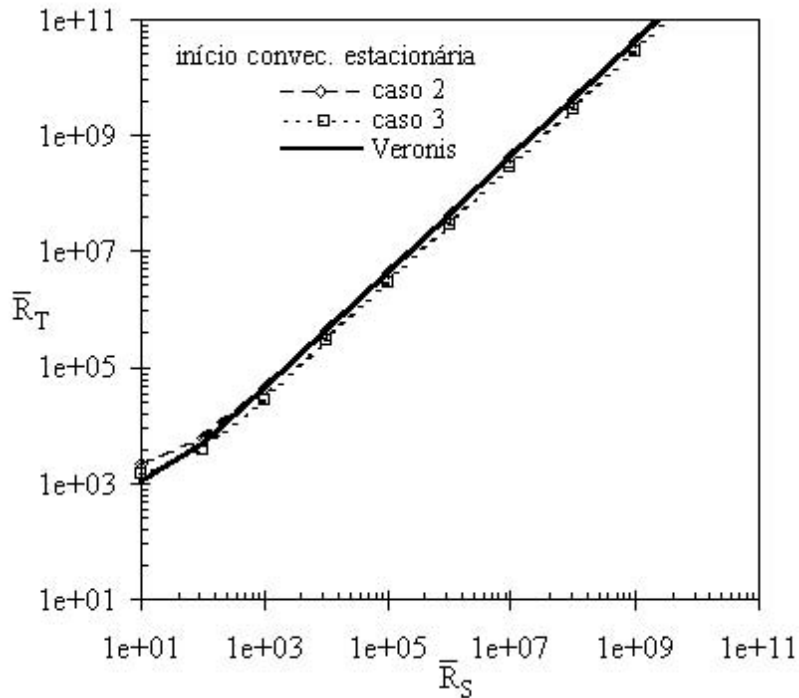


Figura 5.29: Convecção estacionária: Caso 2 (Eq.:(5.179)), Caso 3 (Eq.:(5.207)) e análise de Veronis

A Figura 5.30 mostra as equações dos declives dos estados marginais para o início de instabilidade. O Caso 3 é claramente o mais restritivo de todos. Os Casos 2 e 3 são ambos menos restritivos que o resultado obtido por Veronis.

A Figura 5.31 apresenta os declives das rectas dos estados marginais do início de convecção estacionária para os Casos 1, 2 e 3 e o resultado de Veronis obtido para a mesma situação. Todos os Casos 1, 2 e 3 se apresentam mais restritivos do que os resultados provenientes da análise de Veronis. No entanto, enquanto que os Casos 1 e 2 são apenas um pouco mais restritivos em comparação com o resultado de Veronis, para valores baixos do número de Rayleigh térmico (ou salino) o Caso 3 mostra ser sempre bastante mais restritivo do que Veronis. Considerando o número de Rayleigh salino médio característico de um Lago Solar real, neste caso o de Pégões, cujo valor é $\bar{R}_S = 3 \times 10^{12}$, pode concluir-se que:

- O início de movimento oscilatório ocorre para:

Modelo de Veronis $\bar{R}_T > 2.427 \times 10^{12}$;

Caso 1 $\bar{R}_T > 2.535 \times 10^{12}$;

Caso 2 $\bar{R}_T > 2.6 \times 10^{12}$;

Caso 3 $\bar{R}_T > 1.686 \times 10^{12}$.

- O início de convecção estacionária dá-se para:

Modelo de Veronis $\bar{R}_T > 1.3 \times 10^{14}$;

Caso 1 $\bar{R}_T > 1.27 \times 10^{14}$;

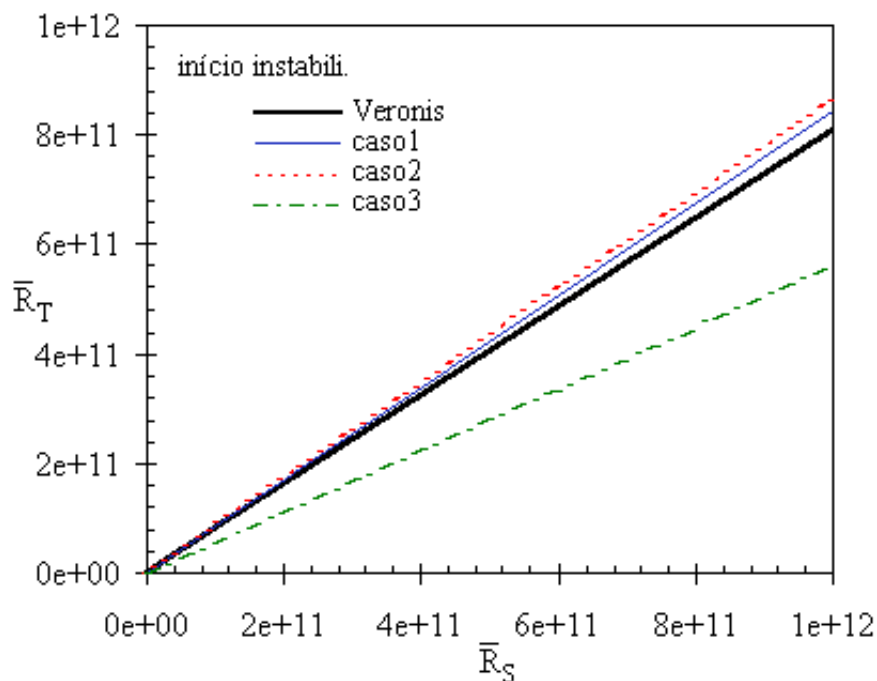


Figura 5.30: Declives das rectas do início de instabilidades (Casos 1, 2 e 3 e de Veronis)

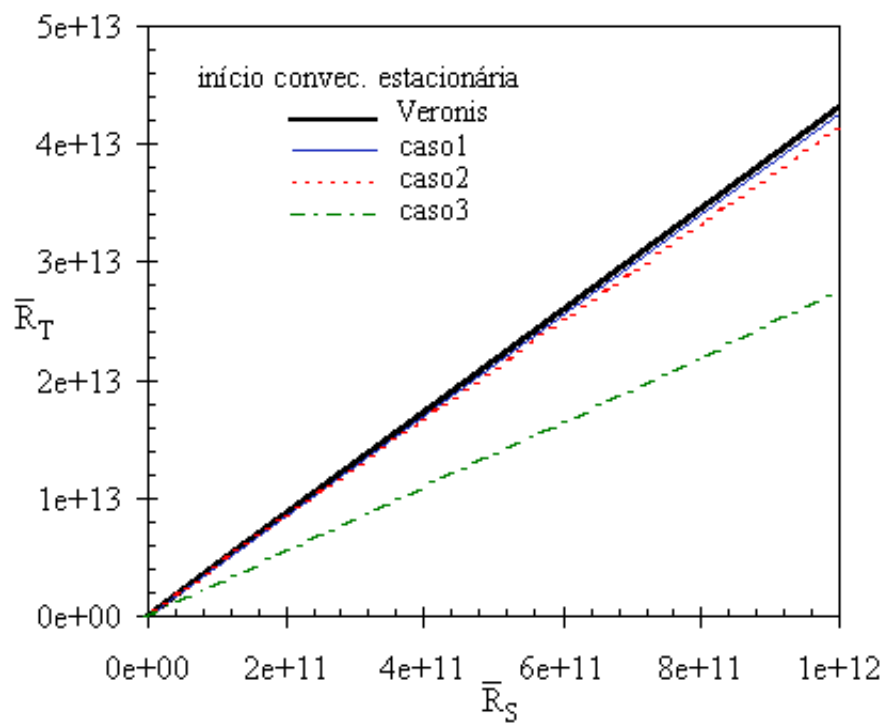


Figura 5.31: Declives das rectas do início movimento estacionário (Casos 1, 2 e 3 e de Veronis)

Caso 2 $\overline{R}_T > 1.24 \times 10^{14}$;

Caso 3 $\overline{R}_T > 8.256 \times 10^{13}$.

A transição da situação de regime difusivo puro para regime convectivo faz-se através de uma zona de transição onde ocorre movimento oscilatório. Esta zona de transição para o Caso 1 é evidenciada para números de Rayleigh térmico e salino menores que 10^2 (ver a Figura 5.5), mas para o Caso 2 é muito estreita (ver a Figura 5.18). Já no Caso 3 esta zona é evidenciada para valores de R_T e R_S médios da ordem de 10^4 .

De acordo com estes resultados pode dizer-se que no Caso 1 o efeito da absorção de radiação é responsável pela ocorrência de movimentos oscilatórios para valores baixos dos números de Rayleigh, mas que no Caso 2 o efeito da variação dos coeficientes de difusão implica uma transição de regime muito rápida não se chegando praticamente a estabelecer uma zona onde haja movimento oscilatório.

No Caso 3 o início de instabilidades dá-se mais cedo e a zona de transição permanece até valores de Rayleigh de 10^4 . Este caso está claramente mais perto do início das instabilidades, permanecendo estas até se passar a regime convectivo, para uma maior gama de números de Rayleigh.

Capítulo 6

Modelação de Lagos Solares

6.1 Introdução

6.1.1 Objectivo

O objectivo deste capítulo consiste em simular o funcionamento de um Lago Solar. Com esta simulação pretende-se contribuir para um melhor conhecimento da dinâmica de um sistema duplamente difusivo, analisando com o modelo obtido:

1. O início de movimento convectivo e consequente desestabilização do Lago, isto é caracterizar a mudança de regime difusivo para convectivo descrevendo a forma como a velocidade varia;
2. A evolução dos campos de temperatura e de salinidade;
3. Confirmar os resultados obtidos no Capítulo 5 sobre os critérios de estabilidade.

Numa vertente mais prática pretende-se fornecer a informação necessária sobre a forma como os Lagos Solares funcionam, como por exemplo, o gradiente de salinidade necessário por forma a impedir a homogeneização do fluido durante um certo período de tempo.

No início do Capítulo desenvolve-se a formulação analítica do modelo e estabelecem-se as condições de fronteira e as condições iniciais, finalizando-se com a integração da parte espacial do sistema de equações diferenciais não lineares descritivas do fenómeno de dupla difusão que ocorre no Lago. Esta integração utiliza elementos de Álgebra Computacional Simbólica (CAS), mediante a utilização do "software" MAPLE V.

De seguida prossegue-se à integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias, utilizando uma subrotina FORTRAN, a qual emprega as "Backward Differentiation Formulas" (BDF) ou método rígido de Gear. Os resultados numéricos provenientes desta integração são manipulados novamente com o "software" MAPLE V, o qual permite fazer a visualização gráfica (temporal e/ou espacial) das variáveis em jogo.

Finaliza-se o Capítulo estabelecendo uma comparação com os dados experimentais obtidos no Lago Solar de Pégões, e validando os resultados de estabilidade obtidos no Capítulo 5.

6.1.2 Modelos existentes: revisão bibliográfica

A análise do comportamento dinâmico de um Lago Solar pode ser utilizada como forma de prever a sua evolução e consequentemente de otimizar os respectivos parâmetros operacionais.

1. Modelos de difusão;

Modelos analíticos unidimensionais Os modelos analíticos existentes modelam a evolução do campo das temperaturas através da equação de conservação da energia. Estes modelos diferem entre si nos efeitos que analisam.

Atribui-se a Weinberger (1964) o primeiro modelo matemático do comportamento de um Lago Solar. Este autor sobrepôs os efeitos da absorção de radiação solar nas diferentes zonas de um Lago Solar, procedimento seguido por Dake and Harleman (1969) e Akbarzadeh and Ahmadi (1980).

Rabl and Nielsen (1975) incorporaram no modelo difusivo os efeitos da acção do vento à superfície e os efeitos da extracção de energia na zona de armazenamento. Estes autores verificaram que, num Lago Solar, se desenvolve quer uma zona superficial por acção do vento e da absorção de radiação, quer uma zona de armazenamento no fundo do Lago. Com base num lago experimental de 400 m² de superfície constataram:

- (a) que a acção do vento é bastante importante, mesmo para velocidades baixas, uma vez que o vento contribui para o alargamento da zona superficial (durante um período ventoso o Lago viu a sua zona superficial alargada em 15 cm mesmo tendo as ondas produzidas pelo vento poucos centímetros de amplitude). Concluíram que havendo uma protecção adequada do Lago face à acção do vento, a quantidade de sal utilizada para a manutenção do gradiente salino é inferior à quantidade utilizada sem aquela protecção;
- (b) que em relação à extracção de energia, devido ao aumento da zona de armazenamento, a zona gradiente quase desapareceu ficando a sua espessura reduzida a menos de 20 cm.

Modelos numéricos unidimensionais Em relação aos modelos numéricos, o método de integração mais utilizado para obter a solução da equação de conservação de energia com as condições de fronteira e de valor inicial apropriadas, é o método das Diferenças Finitas, Richtmyer and Morton (1967), Hawlader and Brinkworth (1981a) com as condições de fronteira e de valor inicial apropriadas. Estes modelos incorporam, na sua maioria, (Hawlader and Brinkworth (1981b)), uma representação das condições climáticas obtida a partir de médias horárias de dados meteorológicos, e contabilizam as perdas de calor por radiação, evaporação e convecção que ocorrem à superfície do Lago.

A modelação da absorção da radiação solar é feita ou através de expressões empíricas, como é o caso de Bryant and Colberk (1977), ou através de expressões que descrevem a atenuação da radiação solar propondo um coeficiente de extinção calculado a partir da divisão do espectro solar em bandas, Rabl and Nielsen (1975), Weinberger (1964) e Hull (1980).

Jayadev and Henderson (1979) utilizando um método de elementos finitos para simular o comportamento de um Lago Solar. Consideraram que as zonas convectivas superior e inferior são descritas apenas por um elemento finito e previram a possibilidade de seleccionar o número de elementos finitos para a zona gradiente. Com este modelo foram observados os efeitos de armazenamento de energia térmica, da transmissividade óptica na camada e as perdas térmicas superficiais. Estes autores introduziram uma vertente económica da utilização do Lago Solar como colectador, empregando técnicas de optimização. Desde o início dos anos 80 que os modelos numéricos que simulam o funcionamento de Lagos Solares passaram a considerar as trocas de calor com o solo e nesta linha a contribuição mais importante foi a dada por Hull and Shu (1984).

Modelos numéricos bidimensionais O modelo numérico desenvolvido por Haddidy et al. (1980) é exemplo de um modelo de condução de calor, bidimensional, considerando a extracção de energia no fundo do lago e as perdas de calor através das paredes laterais.

2. Modelos de dupla difusão.

Modelos numéricos unidimensionais Um dos primeiros modelos que envolvem as equações de conservação da energia e do sal é atribuído a Delnore (1980) o qual fez uma previsão da evolução dos perfis verticais de temperatura estabelecidos no Oceano.

Cha et al. (1982) baseou-se neste modelo e analisou a variação dos coeficientes de difusão térmica e molecular na zona convectiva superior de um Lago. Propôs correlações empíricas para as perdas de calor à superfície (devidas a evaporação, radiação e convecção), não deixando, contudo, de referir que os valores relativos a estas perdas se deveriam basear em modelos climáticos que simulassem adequadamente a realidade. Não analisou o efeito da extracção da energia da zona de armazenamento.

Marett (1987) estudou o comportamento do gradiente salino considerando de uma forma conjunta os efeitos de convecção por dupla difusão no seio do Lago e por efeito do vento à superfície. Estes efeitos foram igualmente analisados por Azhari (1988), Tsilingiris (1985), Turner (1973) e Foster (1965).

Meyer et al. (1982) modelou o comportamento do Lago Solar de Los Alamos (com uma área de 232 m²) considerando-o dividido em três zonas com o objectivo de analisar o comportamento das fronteiras nas interfaces entre as zonas convectivas (superior e inferior) e a zona gradiente. Analisou igualmente os efeitos de superfície, aquecimento do Lago e turbulência provocada pelo vento.

Schladow (1984) desenvolveu um modelo computacional ("DYSOSM") que parametriza de uma forma separada os mecanismos que contribuem para o aparecimento de movimento convectivo, o qual foi testado com dados obtidos nos Lagos Solares de Alice Springs, Austrália e Beth Ha'arava, Israel.

Ouni et al. (1998) apresentou uma simulação idêntica do Lago Solar de El Bibane, na Tunísia.

Em face do que foi exposto pode concluir-se que:

- Os primeiros modelos analíticos, descritivos do comportamento de Lagos Solares Weinberger (1964) e Kooi (1979), são modelos de condução de calor e unidimensionais.
- A introdução de métodos numéricos na modelação dos Lagos Solares permite analisar geometrias mais complicadas, nomeadamente a bidimensionalidade e a tridimensionalidade e tratar os efeitos de convecção devidos aos fenómenos de dupla difusão e a a influência do vento, como é o caso do modelo de Joyce (1992).
- Os modelos de Lagos Solares bi/tridimensionais são, pois, modelos numéricos. Estes modelos considerem a existência de termo convectivo nas equações de conservação, admitam permutas térmicas ao nível da superfície e no solo e entram em linha de conta com as variáveis climáticas, como a temperatura ambiente, a humidade relativa, a velocidade do vento simuladas a partir de dados reais observados.

6.2 Estabelecimento do problema físico-matemático

O modelo que se pretende obter considera que o Lago é formado por uma camada de fluido onde é imposto um gradiente de salinidade. Esta camada de fluido é aquecida pela radiação solar sendo a radiação absorvida responsável pelo estabelecimento de um gradiente de temperatura. A posição relativa destes dois gradientes é determinante para a estabilidade do Lago.

6.2.1 Formulação do modelo de dupla difusão

A formulação do problema descritivo do comportamento do Lago Solar que se passa a apresentar, Figura 6.1 considera uma configuração bidimensional variando a altura (eixo

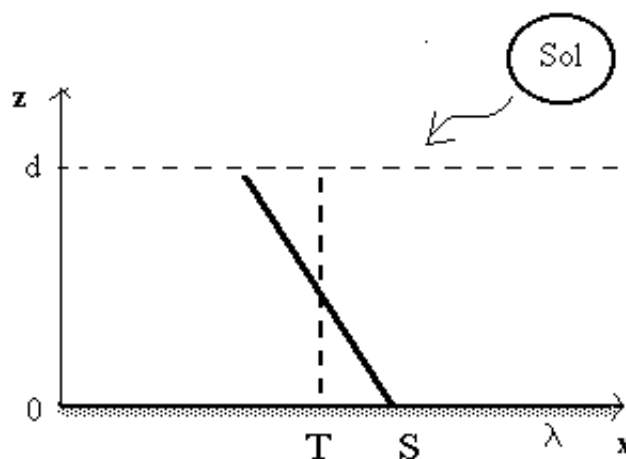


Figura 6.1: Esquema de um Lago Solar

dos zz) de 0 a d e o comprimento (eixo dos xx) de 0 a λ . O sistema de equações diferenciais

não lineares que descreve o comportamento do Lago é dado, na forma dimensional, por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla P + g(\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = K_T \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho_m C_p} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = K_S \nabla^2 S \quad (6.3)$$

$$\rho_m - \rho = \rho(\alpha(T - T_m) - \beta(S - S_m)) \quad (6.4)$$

onde o termo de geração interna, \dot{q} , incorpora a absorção de radiação solar no Lago, através da expressão:

$$\dot{q} = I_h(t) \mu \exp(-\mu(d - z)) \quad (6.5)$$

sendo a radiação solar global incidente $I_h(t)$ definida, como se pode ver no Apêndice A por:

$$I_h(t) = I_d(t) P_d + I_b(t) P_b(\theta) \cos(\theta) \quad (6.6)$$

Introduzindo a função de corrente ψ definida por (2.99) e aplicando o operador ∇^* , (2.9), o sistema (6.1)-(6.4) vem substituído por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = -g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) + J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K_T \nabla^2 \right) T = J(\psi, T) + \frac{I_h(t) \mu \exp(-\mu(d - z))}{\rho C_p} \quad (6.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K_S \nabla^2 \right) S = J(\psi, S) \quad (6.9)$$

A possível existência de movimento convectivo está prevista nos termos dos Jacobianos que figuram nas três equações, sendo definidos por:

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.10)$$

$$J(\psi, T) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.11)$$

$$J(\psi, S) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.12)$$

Será o sistema de equações diferenciais não lineares dado por (6.7)-(6.9) que estará em jogo ao longo do presente Capítulo e que serve de base à modelação do Lago.

6.2.2 Condições de fronteira

Como já se referiu, as condições de fronteira a impôr ao sistema (6.7)-(6.9) devem ser suficientemente próximas da realidade. Neste sentido, tecem-se algumas considerações sobre a forma como se chegou à formulação destas condições.

Temperatura

Na fronteira superior do Lago existem permutas térmicas entre a superfície e o meio ambiente e na fronteira inferior existem permutas térmicas entre o fundo do Lago e o solo. De uma forma esquemática tem-se, para a temperatura:

1. fronteira superior
 - (a) permutas por convecção;
 - (b) permutas por radiação;
 - (c) permutas por evaporação.
2. fronteira inferior
 - (a) permutas por condução;
 - (b) absorção no solo.

Fronteira superior As permutas térmicas efectuadas na fronteira superior podem ser observadas na Figura 6.2. concluindo-se que:

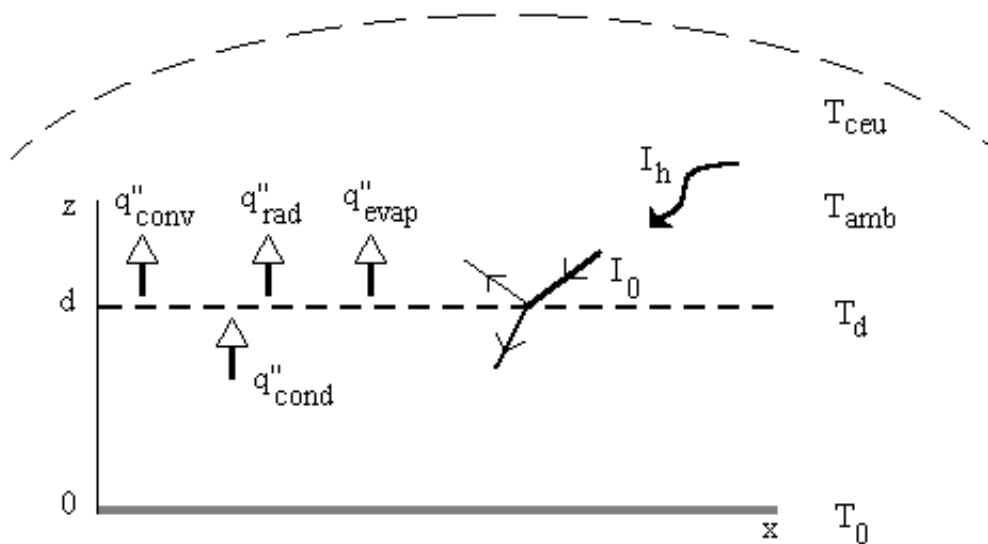


Figura 6.2: Fluxos de calor em $z = d$.

$$-k_w \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=d} = q''_{conv} + q''_{rad} + q''_{evap} \quad (6.13)$$

onde q''_{conv} designa o fluxo convectivo, q''_{rad} o fluxo radiativo e q''_{evap} o fluxo evaporativo para o meio ambiente. A esta fronteira chega, proveniente do interior do Lago, um fluxo de calor por condução q''_{cond} , dado por $-k_w(\partial T/\partial z)$. Analisa-se de seguida cada um dos fluxos que figuram no segundo membro da equação (6.13).

i) **Fluxo convectivo** As permutas por convecção são traduzidas pela expressão:

$$q''_{conv} = h_d (T_d(t) - T_{amb}(t)) \quad (6.14)$$

onde h_d é o coeficiente de convecção do meio ambiente, $T_d(t)$ designa a temperatura à superfície do Lago e $T_{amb}(t)$ a temperatura ambiente. O coeficiente de convecção h_d é função da velocidade do vento, v_w vindo, de acordo com a relação atribuída a Watmuff et al. (1977):

$$h_d = 2.8 + 3.0v_w \quad (6.15)$$

ii) **Fluxo radiativo** A superfície do Lago radia para o meio envolvente como um corpo cinzento, vindo o fluxo radiativo dado pela expressão:

$$q''_{rad} = \epsilon\sigma \left((T_d(t) + 273)^4 - (T_{ceu} + 273)^4 \right) \quad (6.16)$$

onde T_{ceu} designa a temperatura da envolvente (superfície fictícia na atmosfera), ϵ a emissividade da água e σ designa a constante de Stefan-Boltzman.

A temperatura do céu é dependente do grau de humidade do ar, considerando-se no presente trabalho uma expressão para a temperatura do céu dada, de acordo com Rasmussen (1991), por:

$$T_{ceu} = T_{amb}(t) (0.8 + T_{dp}/250)^{0.25} \quad (6.17)$$

onde a humidade do ar está representada pela sua temperatura de ponto de orvalho. A expressão (6.17) emprega uma correlação entre a temperatura ambiente e a temperatura do ponto de orvalho, T_{dp} (Apêndice D).

iii) **Fluxo evaporativo** A evaporação é um processo complexo que envolve transferência de calor e de massa por difusão e por convecção. Neste processo intervêm as temperaturas da superfície do Lago e do meio ambiente, a velocidade do vento à superfície e ainda a humidade relativa do meio ambiente.

A componente difusiva da evaporação traduz a difusão de vapor de água da superfície (onde a concentração de vapor de água no ar é a correspondente à saturação à temperatura da superfície) e a componente convectiva traduz o transporte do ar "carregado" de vapor de água.

Para a dedução do fluxo evaporativo utilizou-se a expressão desenvolvida por Bowen (1926) e posteriormente referida por Duffie and Beckman (1980), dada por:

$$\frac{q''_{conv}}{q''_{evap}} = 61.35 \frac{(T_d(t) - T_{amb}(t))}{(P_{s,T_d} - P_{T_{amb}})} \frac{P_{atm}}{101308} \quad (6.18)$$

onde $P_{T_{amb}}$ designa a pressão parcial do vapor de água no meio ambiente, P_{s,T_d} designa a pressão parcial do vapor saturado à temperatura do ar e P_{atm} a pressão atmosférica, dadas respectivamente, por:

$$P_{T_{amb}} = \phi P_{s,T_d} \quad (6.19)$$

$$P_{s,T_d} = 4.148T_d^2 - 11.358T_d + 878.49 \quad (6.20)$$

Substituindo (6.14) em (6.18), à pressão atmosférica normal ($101308Pa$) e introduzindo a expressão para P_{s,T_d} e para $P_{T_{amb}}$, as permutas por evaporação vêm traduzidas por:

$$q''_{evap} = 0.0163h_d[(4.148T_d(t)^2 - 11.358T_d(t) + 878.49) - \phi(4.148T_{amb}(t)^2 - 11.358T_{amb}(t) + 878.49)] \quad (6.21)$$

Apresentadas as expressões dos fluxos de calor à superfície do Lago obtém-se de (6.13) a relação para a condição de fronteira em $z = d$:

$$\begin{aligned} -kw \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=d} &= h_d(T_d(t) - T_{amb}(t)) + \epsilon\sigma \left((T_d(t) + 273)^4 - (T_{ceu} + 273)^4 \right) \\ &+ 0.0163h_d \left[4.148(T_d(t)^2 - \phi T_{amb}(t)^2) \right. \\ &\left. - 11.358(T_d(t) - \phi T_{amb}(t)) + 878.94(1 - \phi) \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

Fronteira inferior As permutas térmicas na fronteira inferior do Lago estão esquematizadas na Figura 6.3 concluindo-se que:

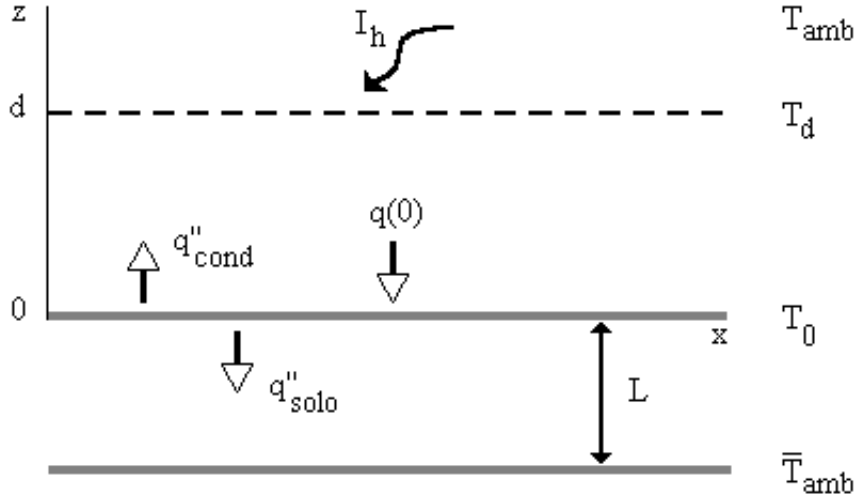


Figura 6.3: Fluxos de calor em $z = 0$

$$-k_w \frac{\partial T}{\partial z} = q''_{solo} - q(0) \quad (6.23)$$

onde q''_{solo} designa as permutas por condução para o solo e $q(0)$ a radiação solar que atingido o fundo é aí totalmente absorvida. As trocas com o solo são traduzidas pela expressão:

$$q''_{solo} = \frac{k_{solo}}{-L} (\bar{T}_{amb}(t) - T_0(t)) \quad (6.24)$$

onde $T_0(t)$ designa a temperatura em $z = 0$ e L designa o comprimento que vai do fundo do Lago a um dado ponto do solo onde a temperatura é aproximadamente constante e igual à temperatura ambiente média anual (\bar{T}_{amb}).

Tanto o coeficiente de transferência de calor para o solo k_{solo} como o comprimento L são variáveis com a constituição do solo. Se este for constituído, por exemplo, por uma mistura de betão e de areia tem-se que a 50 cm de profundidade a temperatura do solo é constante tendo um valor levemente superior ao valor da temperatura média ambiente Ridha (1997). Neste trabalho e com base em observações efectuadas no caso do Lago de Pégões, Joyce (1992), a temperatura do solo a 2 m de profundidade pode ser considerada como sendo igual à temperatura ambiente média anual.

A quantidade de radiação absorvida em $z = 0$, $q(0)$ é igual à quantidade de radiação que seria absorvida no solo, obtendo-se a sua expressão por integração do termo de geração interna de calor, na camada adjacente à fronteira inferior do Lago, isto é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \dot{q} dz &= \int_{-\infty}^0 I_h(t) \mu \exp(-\mu(d-z)) dz \\ &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^0 I_h(t) \mu \exp(-\mu(d-z)) dz \\ &= I_h(t) \lim_{z \rightarrow -\infty} [\exp(-\mu(d-z))]_z^0 \\ &= I_h(t) \exp(-\mu d) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Observe-se que a quantidade de energia absorvida no Lago e junto ao solo tem que ser igual à quantidade de radiação solar global incidente, ou seja:

$$\int_{-\infty}^d \dot{q} dz = I_h(t) \quad (6.26)$$

Introduzindo as expressões (6.24) e (6.25) em (6.23) obtém-se a expressão que traduz a condição de fronteira inferior para a temperatura:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{k_{solo}}{Lk_w} (\bar{T}_{amb}(t) - T0(t)) - \frac{I_h(t) \exp(-\mu d)}{k_w} \quad (6.27)$$

A inexistência de trocas de calor através das fronteiras laterais implica que as condições de fronteira para a temperatura nas fronteiras laterais sejam de fluxo imposto e igual a zero. Têm-se assim:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\lambda} = 0 \quad (6.28)$$

Salinidade

No caso da salinidade, como não existem fluxos de sal para o exterior, as condições de fronteira são de fluxo nulo em todas as fronteiras. Vem, pois, para a salinidade:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=d} = 0 \quad (6.29)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=\lambda} = 0 \quad (6.30)$$

Velocidade

Para a velocidade as fronteiras são consideradas como rígidas excepto a fronteira superior onde a componente tangencial pode ser diferente de zero, facto que decorre da existência dos efeitos à superfície como seja o efeito do vento, que não podem ser desprezados. Desta forma tem-se:

$$\mathbf{v}|_{z=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{z=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\mathbf{v}|_{x=0, x=\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0, x=\lambda} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{x=0, x=\lambda} = 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{z=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (6.33)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_{x=0, x=\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x=0, x=\lambda} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right|_{x=0, x=\lambda} = 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

Atendendo às relações (6.31),(6.32) e à sua definição, a condição de fronteira para a função de corrente é dada, por continuidade, por:

$$\psi|_{z=0, z=d} = 0, \quad \psi|_{x=0, x=\lambda} = 0 \quad (6.35)$$

6.2.3 Condições iniciais

No instante inicial admite-se que o Lago está parado, vindo o campo de velocidade inicial nulo, isto é $\mathbf{v}(t = 0) = 0$.

No que toca à temperatura o campo inicial é uniforme, ou seja a temperatura inicial constante, $T(t = 0) = \text{const.}$

Para a salinidade o campo inicial varia de uma forma linear com a profundidade de acordo com a expressão:

$$S(t = 0) = a - b \left(\frac{z}{d} \right) \quad (6.36)$$

Os valores a atribuir às constantes a e b correspondem a perfis com diferentes inclinações e determinam a quantidade de sal existente no Lago.

6.3 Resolução do problema de dupla difusão

A resolução do problema estabelecido na secção anterior, dado pelo sistema de equações (6.7)-(6.9) complementado pelas condições de fronteira e iniciais estabelecidas, passa por duas fases. Primeiro efectua-se a sua integração aplicando uma formulação fraca no

domínio $\Omega = [0, \lambda] \times [0, d]$ propondo soluções aproximadas para as variáveis temperatura, salinidade e velocidade, esta última escrita em termos da função de corrente ψ .

Desta integração resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias, dependente apenas do tempo, o qual é resolvido por integração numérica utilizando o método BDF de Gear. Obtêm-se, assim, os valores das variáveis temperatura, salinidade e função de corrente sendo possível a visualização quer temporal quer espacial da evolução dos campos temperatura, salinidade e velocidade, evolução que dá indicação da dinâmica do Lago.

6.3.1 Formulação fraca

Escrevendo a velocidade em termos de função de corrente ψ a formulação fraca do sistema (6.7)-(6.9) vem dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \varphi d\Omega &= - \int_{\Omega} K_T (\nabla T \cdot \nabla \varphi) d\Omega + K_T \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial z} \varphi d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} \frac{I_h(t) \mu \exp(-\mu(d-z))}{\rho C_p} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} J(\psi, T) \varphi d\Omega \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} \xi d\Omega = - \int_{\Omega} K_S (\nabla S \cdot \nabla \xi) d\Omega + K_S \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial z} \xi d\Gamma + \int_{\Omega} J(\psi, S) \xi d\Omega \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} (-\nabla \psi \cdot \nabla \varpi) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial t} (\nabla \psi \cdot \vec{n}) \varpi d\Gamma \\ &= \nu \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} (\Delta \psi) \varpi d\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla \psi \cdot \frac{\partial}{\partial z} \varpi d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \varpi d\Omega \right] \\ &- \int_{\Omega} g\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x} \varpi \right) d\Omega + \int_{\Omega} g\beta \left(\frac{\partial S}{\partial x} \varpi \right) d\Omega + \int_{\Omega} J(\psi, \nabla^2 \psi) \varpi d\Omega \end{aligned} \quad (6.39)$$

Como se referiu no Capítulo 4, a escolha das funções de aproximação para as variáveis T , S e ψ tem que obedecer a determinados requisitos; as soluções, além de terem que obedecer às condições de fronteira essenciais, devem ser regulares (contínuas, diferenciáveis).

Para a temperatura toma-se como função de aproximação:

$$T(t, x, z) = a_1(t)T_1^*(x, z) + a_2(t)T_2^*(x, z) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)T_i^*(x, z) \quad (6.40)$$

com

$$T_1^*(x, z) = \frac{1}{\|1\|} \quad (6.41)$$

$$T_2^*(x, z) = \frac{z/d}{\|z/d\|} \quad (6.42)$$

$$T_k^*(x, z) = \frac{\sin(\alpha_i) \cos(\beta_j)}{\|\sin(\alpha_i) \cos(\beta_j)\|}, \quad k > 2 \quad (6.43)$$

onde

$$\alpha_i = \left(\frac{\pi x i}{\lambda} \right), \quad \beta_j = \left(\frac{\pi z j}{d} \right) \quad (6.44)$$

resultando uma expressão do tipo:

$$T(t, x, z) = a_1(t) + \left(\frac{z}{d}\right)a_2(t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \sin(\alpha_i) \cos(\beta_j) \quad (6.45)$$

sendo a norma $\| \cdot \|_{l^2}$ dada, como se referiu no Capítulo 4, por:

$$\|T^*\|_{l^2} = \left(\int_{\Omega} T^{*2} d\Omega \right)^{1/2} \quad (6.46)$$

A condição inicial de campo uniforme para a temperatura é verificado por (6.45) pondo:

$$\begin{cases} a_1(t=0) = \text{const.} \\ a_k(t=0) = 0 \quad k > 1 \end{cases}$$

As condições de fronteira de fluxo, condições naturais, aparecem incorporadas no termo de fronteira da equação (6.37), o qual vem escrito na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial z} \varphi d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} - (q''_{conv} + q''_{rad} + q''_{evap}/k_w) d\Gamma_1 \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} ((-q''_{solo} - q''_{absor})/k_w) d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde $\Gamma_1 \equiv (z = d)$ e $\Gamma_2 \equiv (z = 0)$.

A função de aproximação para a salinidade é do mesmo tipo da função dada por (6.40), vindo:

$$S(t, x, z) = b_1(t)S_1^*(x, z) + b_2(t)S_2^*(x, z) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t)S_i^*(x, z) \quad (6.48)$$

com

$$S_1^*(x, z) = \frac{1}{\|1\|} \quad (6.49)$$

$$S_2^*(x, z) = \frac{z/d}{\|z/d\|} \quad (6.50)$$

$$S_k^*(x, z) = \frac{\sin(\alpha_i) \cos(\beta_j)}{\|\sin(\alpha_i) \cos(\beta_j)\|}, \quad k > 2 \quad (6.51)$$

resultando

$$S(t, x, z) = b_1(t) + \left(\frac{z}{d}\right)b_2(t) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t) \sin(\alpha_i) \cos(\beta_j) \quad (6.52)$$

A condição inicial fica garantida fazendo, de acordo com a relação geral proposta para o campo inicial, $S(t=0) = a - b \left(\frac{z}{d}\right)$:

$$\begin{cases} b_1(t=0) = a \\ b_2(t=0) = -b \\ b_k(t=0) = 0 \quad k > 2 \end{cases}$$

O termo de fronteira da equação (6.9) anula-se em resultado das condições de fronteira de fluxo nulo. A solução da salinidade garante, através do campo inicial imposto, a manutenção ao longo do tempo da quantidade de sal existente no Lago, a qual é dada por:

$$\int_{\Omega} S(t, x, z) d\Omega = Q_{sal} \quad (6.53)$$

Para a velocidade, escrita em termos de função de corrente, a função de aproximação proposta é ligeiramente diferente uma vez que tem que obedecer às condições de fronteira essenciais, vindo:

$$\psi(t, x, z) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}(t) \frac{\psi_i^*(x, z)}{\|\psi_i^*(x, z)\|} \quad (6.54)$$

onde

$$\psi_i^*(x, z) = \left(\frac{z}{d}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^2 \sin(\alpha_i) \sin(\beta_j) \quad (6.55)$$

O campo inicial de velocidades nulo é garantido pondo:

$$c_{ij} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (6.56)$$

As funções de aproximação consideradas para os campos da temperatura, da salinidade e para a função de corrente, garantem a periodicidade em x e em z para as variáveis T , S e ψ . Verificam igualmente as condições de fronteira e de valor inicial impostas ao sistema (6.7)-(6.9). Substituindo as funções dadas por (6.45), (6.52) e (6.55) no sistema (6.7)-(6.9) e admitindo que as funções teste são dadas por expressões do tipo:

$$\varphi = \left\{ 1, \frac{z}{d}, \sin(\alpha_i) \cos(\beta_j) \right\} \quad i, j = 1 \dots n \quad (6.57)$$

$$\xi = \left\{ 1, \frac{z}{d}, \sin(\alpha_i) \cos(\beta_j) \right\} \quad i, j = 1 \dots n \quad (6.58)$$

$$\varpi = \left\{ \left(\frac{z}{d}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^2 \sin(\alpha_i) \sin(\beta_j) \right\}, \quad i, j = 1 \dots n \quad (6.59)$$

obtém-se após integração espacial do sistema (6.7)-(6.9) um sistema de equações diferenciais ordinárias nas variáveis a_i , b_i e c_i .

O número de equações deste sistema varia de acordo com a dimensão do subespaço de funções tentativa considerado para cada variável. Tem-se pois que o número de termos dos desenvolvimentos em série, propostos para cada função de aproximação, condiciona o número de equações do sistema.

6.3.2 Integração numérica

Considerações sobre a escolha das funções tentativa

A funções de aproximação são formadas pelo produto de um polinómio em z por uma função sinusoidal, sendo esta última por seu lado constituída pelo produto de um seno por um coseno ou pelo produto de dois senos, com argumentos em x e z . A existência

do polinómio em z deve-se à exigência de verificar as condições de fronteira essenciais. Permite ainda impôr os perfis iniciais de temperatura e de salinidade (à custa dos dois termos de ordem inferior).

A regra de "geração" para os produtos de funções sinusoidais obriga a que cada vez que se considerem mais termos nas funções de aproximação os termos anteriores devem estar incluídos. Estabelecidas estas regras avançou-se para a integração numérica.

Verificou-se no entanto que, se nas funções de aproximação, as funções tentativa consideradas não forem normalizadas a matriz resultante da integração espacial do termo temporal do sistema de equações diferenciais não lineares (6.7)-(6.9) possui um número de condição muito elevado. Foi, pois, necessário proceder à normalização das funções tentativa resultando as funções de aproximação referidas no parágrafo anterior.

Para tornar claro todo este processo, considere-se o sistema de equações diferenciais não lineares (6.7)-(6.9). A sua integração espacial no domínio $\Omega = [0, \lambda] \times [0, d]$ conduz, como aliás se viu no Capítulo 5, a um sistema de equações diferenciais ordinárias nos coeficientes a_i , b_i e c_i , dependentes de t , o qual se pode escrever sob a forma:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{a} = \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{N}_1(\mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (6.60)$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{b} = \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{N}_2(\mathbf{c}) \mathbf{b} \quad (6.61)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{c} = \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{L}_3(\mathbf{c}) \mathbf{a} + \mathbf{O}_3(\mathbf{c}) \mathbf{b} + \mathbf{N}_3(\mathbf{c}) \mathbf{c} \quad (6.62)$$

onde as matrizes \mathbf{M}_i , $i = 1, 2, 3$ resultam da integração do termo temporal das equações de conservação, as matrizes \mathbf{N}_i , $i = 1, 2, 3$ resultam da integração do termo convectivo, as matrizes \mathbf{L}_3 e \mathbf{O}_3 da integração dos termos independentes e as matrizes \mathbf{A}_i , $i = 1, 2, 3$ da integração dos restantes termos (difusivo, de fronteira e de geração interna). Estas três equações matriciais podem ser escritas na forma abreviada:

$$\mathbf{A}(\mathbf{af})'(t) = f(t, \mathbf{af}) \quad (6.63)$$

efectuando uma correspondência entre os coeficientes a_i , b_i e c_i e os coeficientes $(af)_i$ (para simplificação da exposição que se segue). Assim se a dimensão do vector \mathbf{a} for n , de \mathbf{b} for m e do vector dos coeficientes \mathbf{c} for l obtém-se um vector (\mathbf{af}) de dimensão $n + m + l$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (af)_1 \\ \vdots \\ (af)_n \\ (af)_{n+1} \\ \vdots \\ (af)_{n+m} \\ (af)_{n+m+1} \\ \vdots \\ (af)_{n+m+l} \end{bmatrix}$$

e a matriz \mathbf{A} do sistema (6.63) que resulta das matrizes \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 e \mathbf{M}_3 , vem dada por:

$$\begin{bmatrix} t & t & t & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ t & t & t & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ t & t & t & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & s & s & s & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & s & s & s & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & s & s & s & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & v & v \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & v & v \end{bmatrix}$$

Nesta matriz os três blocos identificados por letras correspondem aos valores obtidos na integração do termo temporal da temperatura (aqui representados por " $t's$ ", com valores diferentes para cada " t "), na integração do termo temporal da salinidade (representados por " $s's$ ", onde estes assumem diferentes valores) e na integração do termo temporal da equação (6.9) (os " $v's$ ").

Verifica-se que, no caso das funções tentativa utilizadas não serem normalizadas a matriz \mathbf{A} é mal condicionada (possui um número de condição muito elevado). Na realidade, na situação de não normalização, a ordem de grandeza dos valores do primeiro e do segundo bloco da matriz \mathbf{A} (os quais dizem respeito à temperatura e à salinidade) é cerca de 10^4 superior à ordem de grandeza dos valores do terceiro bloco, respeitantes à velocidade. O facto da matriz ser constituída por valores com ordens de grandeza tão diferentes contribui para que a mesma seja mal condicionada.

Um número de condição elevado está relacionado com a não invertibilidade da matriz, significando que esta está perto de ser singular, o que torna difícil, podendo mesmo invalidar, o processo de integração numérica do sistema (6.60)-(6.62).

No entanto, após se efectuar a normalização das funções tentativa, o valor do número de condição da referida matriz diminuiu consideravelmente, como se constata da Tabela 6.1. a qual apresenta os números de condição da matriz \mathbf{A} quando se consideram para as

	cond (\mathbf{A})	
Número de modos	Funções não normalizadas	Funções normalizadas
4	82398	120
6	162846	300
8	179136	400
11	490798	970

Tabela 6.1: Números de condição da matriz \mathbf{A}

funções de aproximação desenvolvimentos com 4, 6, 8 e 11 funções tentativa. Conclui-se que o valor de $\text{cond}(\mathbf{A})$ no caso de não existir normalização são muito elevados.

Perante a dificuldade numérica evidenciada optou-se, pois, por considerar as funções tentativa que constituem as funções de aproximação para T , S e ψ normalizadas, o que possibilitou a integração do sistema (6.7)-(6.9).

Método numérico utilizado

O método empregue nesta integração, método BDF de Gear pertence à categoria dos métodos numéricos de Multipasso Implícitos utilizados para tratar sistemas de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$y' = f(t, y(t)) \quad (6.64)$$

ou

$$\mathbf{A}y' = f(t, y) \quad (6.65)$$

sujeitas a um conjunto de condições iniciais e onde \mathbf{A} é uma matriz não singular.

Convém, pois, tecer algumas considerações de ordem geral sobre Métodos Multipasso. Para tal, considerem-se os métodos multipasso lineares, cuja forma geral é dada por:

$$\alpha_m y_{i+m} + \dots + \alpha_0 y_i = h(\beta_m f_{i+m} + \dots + \beta_0 f_i) \quad (6.66)$$

sendo os α_j , β_j coeficientes apropriados e $\alpha_m \neq 0$. Estes métodos correspondem a ter efectuado as aproximações :

$$D_h y(t) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \alpha_j y_{i+j} \quad (6.67)$$

$$F_h(t, y) = \sum_{j=0}^m \beta_j f_{i+j} \quad (6.68)$$

o que significa que y' na equação (6.64) foi aproximado por uma dada fórmula de diferenças finitas e o segundo membro de (6.64) por uma dada média ponderada da função f . Estes métodos centram-se, pois, em determinar os valores dos coeficientes α_j e β_j de modo a que (6.66) tenha um determinado conjunto de propriedades (consistência, convergência e estabilidade), Pina (1995). No caso de sistemas de EDO's a equação (6.64) vem substituída por:

$$\mathbf{y}'(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in \Omega \equiv (\mathbf{t}_0, \mathbf{T}) \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \quad (6.69)$$

onde $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_n)^T$ e $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_n)^T$ e as condições iniciais são $\mathbf{y}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{y}_0$. No caso de sistemas sw EDO's os métodos multipasso lineares descritos para uma equação são aplicados componente a componente das respectivas fórmulas ou na respectiva versão vectorial.

A rotina de integração numérica utilizada no presente trabalho emprega dois tipos de métodos multipasso: o de Adams-Moulton e o BDF, sendo qualquer um deles uma generalização dos métodos de passo simples. Assim, enquanto nestes, o valor y_{i+1} é calculado a partir do valor y_i utilizando apenas a informação no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ (embora neste passo já se disponha dos valores y_0, y_1, \dots, y_i), a ideia dos métodos multipasso consiste em recorrer à informação obtida em vários passos para assim conseguir uma melhor aproximação do valor y_{i+1} .

No caso do método de Adams-Moulton a ideia é pois, estender o polinómio interpolador até t_{i+1} . A expressão geral deste método é

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j f_{i-j+1} \right) \quad (6.70)$$

e como no segundo membro figura o valor $f_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$ os métodos de Adams-Moulton são implícitos o que quer dizer que para obter y_{i+1} é necessário resolver a equação algébrica (em geral não linear) dada por:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \phi(y_{i+1}) \\ \phi(y_i) &= y_i + h \left(\sum_{j=1}^{m+1} \gamma_j f_{i-j+1} \right) + h_0 \gamma_0 f(t_{i+1}, y_{i+1}) \end{aligned} \quad (6.71)$$

O método converge se $|\phi'(y_{i+1})| < 1$ uma vez que:

$$\phi'(y_i) = h \gamma_0 \frac{\partial f}{\partial y}(t_{i+1}, y) \quad (6.72)$$

havendo convergência para todos os valores de $h < h_0$ com h_0 calculado a partir da expressão $h_0 \left| \gamma_0 \frac{\partial f}{\partial y}(t_{i+1}, y) \right| = 1$ e estimativas iniciais $y_{i+1}^{(0)}$ suficientemente próximas do valor exacto.

Para obter esta estimativa recorre-se, por vezes, a um método de Adams-Bashforth (Conte and de Boor (1980), Pina (1995)), sendo esta combinação de métodos designada por "predictor-corrector": o método explícito de Adams-Bashforth funciona como fórmula de previsão do valor y_{i+1} e as iterações de ponto fixo do método implícito de Adams-Moulton actuam como correctoras deste valor.

Na rotina "DIVPAG" utilizada, e que pertence ao pacote de rotinas FORTRAN designado por IMSL, é feita uma tentativa para controlar a norma do erro cometido em cada passo de integração (erro local) por forma a que o erro global seja proporcional a um valor fornecido pelo utilizador e designado por TOL (tolerância para controlo do erro). Esta norma do erro pode ser calculada de diferentes formas à escolha do utilizador. Por exemplo se e_i for o valor absoluto da estimativa do erro em $y_i(t)$ a norma do erro pode ser dada pelo $\min(\text{erro absoluto}, \text{erro relativo}) = \max(e_i/w_i)$, $i = 1 \dots N$ com $w_i = \max(|y_i(t)|, 1.0)$.

A utilização da rotina "DIVPAG" com o método de Adams-Moulton evidenciou o fenómeno intrínseco à solução numérica de sistemas de EDO's designado por rigidez, quando se aumentou o número de termos das funções de aproximação de quatro para seis. Este fenómeno perturbador aparece quando a componente menos importante da solução é a que determina o valor do passo, ou seja, quando as componentes da solução se comportam com escalas de tempo muito diferentes, Conte and de Boor (1980). Na presença de sistemas rígidos a rotina "DIVPAG" prevê como alternativa a utilização do método BDF, designado por método rígido de Gear e que consiste numa variação ao método de Adams-Moulton ao utilizar as "Backward Differentiation Formulas", Gear (1971). Em cada passo de integração, o método faz uso da matriz das derivadas do sistema não linear (6.65) designada por \mathbf{L} , a qual tem a forma $\mathbf{L} = \mathbf{A} + \eta \mathbf{J}$ sendo η um valor calculado pela rotina de integração e \mathbf{J} o Jacobiano dos segundos membros. É dada, da mesma forma, uma tolerância para controlo do erro tentando a rotina controlar a norma do erro local por forma a que o erro global seja proporcional ao valor fornecido.

Variáveis do sistema de EDO'S

O sistema não linear de equações diferenciais contém nos segundos membros diferentes tipos de parâmetros físicos, que se agrupam em quatro classes, denotadas por cl_1 , cl_2 , cl_3 e cl_4 .

Na cl_1 encontram-se os parâmetros físicos típicos do Lago os quais apresentam os valores que constam da Tabela 6.2 .

$\lambda = 6 \text{ m}$	$k_w = 0.6 \text{ W/m}^2$
$d = 3 \text{ m}$	$k_{solo} = 2 \text{ W/m}^2$
$L = 3 \text{ m}$	$\mu = 0.8 \text{ m}^{-1}$

Tabela 6.2: Valores Típicos do Lago Solar (cl_1)

Numa segunda classe, cl_2 , situam-se os dados referentes às variáveis climatológicas, como a radiação solar global I_h , a temperatura ambiente T_{amb} , a velocidade do vento v_w e a humidade relativa ϕ .

Os valores médios horários destes dados climatológicos foram obtidos através do "software" CLIMED, Aguiar (1998), por geração sintética com base em valores reais observados na zona de Pégões. A Figura 6.4 apresenta a simulação da evolução da radiação solar global I_h .

Na Figura 6.5 apresenta-se a geração da temperatura ambiente T_{amb} . No que respeita a velocidade do vento como os dados sintetizados correspondem a uma velocidade a 10 m de altura foi necessário fazer uma aproximação para obter valores de velocidade ao nível do solo, isto é junto à fronteira superior do Lago. A simulação da velocidade do vento pode ser observada na Figura 6.6.

A evolução da quarta variável climatológica considerada, a humidade relativa está patente na Figura 6.7.

Em cl_3 encontram-se aqueles parâmetros cujo cálculo é feito com base em cl_2 e que são a temperatura do céu T_{ceu} e o coeficiente de convecção h_d . A temperatura do céu é obtida com base na expressão (6.8) a partir dos valores sintetizados da humidade relativa e da temperatura ambiente. A Figura 6.8 mostra os valores sintetizados para a temperatura do céu. O coeficiente de convecção h_d obtém-se da expressão (6.15) a partir dos valores simulados por geração sintética para a velocidade do vento, podendo a sua evolução ser vista na Figura 6.9 .

Finalmente em cl_4 residem aqueles parâmetros que são determinantes dos campos iniciais de temperatura e de salinidade. Estão pois relacionados com as condições iniciais que complementam o sistema de equações diferenciais não lineares (6.7)-(6.9), juntamente com o conjunto de condições de fronteira já referidos. Para a temperatura considera-se como campo inicial

$$T(t = 0) = 15^\circ\text{C} \quad (6.73)$$

uma vez que a temperatura ambiente média anual gerada da zona de Pégões é da ordem dos 15°C . O campo inicial de concentração salina pode variar, de acordo com vários autores, Rabl and Nielsen (1975), Cha et al. (1982), entre 0% à superfície e 22,5% no fundo.

Se o diferencial de concentração salina ΔS for de 22,5% o campo inicial (expresso em kg/m^3) vem dado por:

$$S = 230 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.74)$$

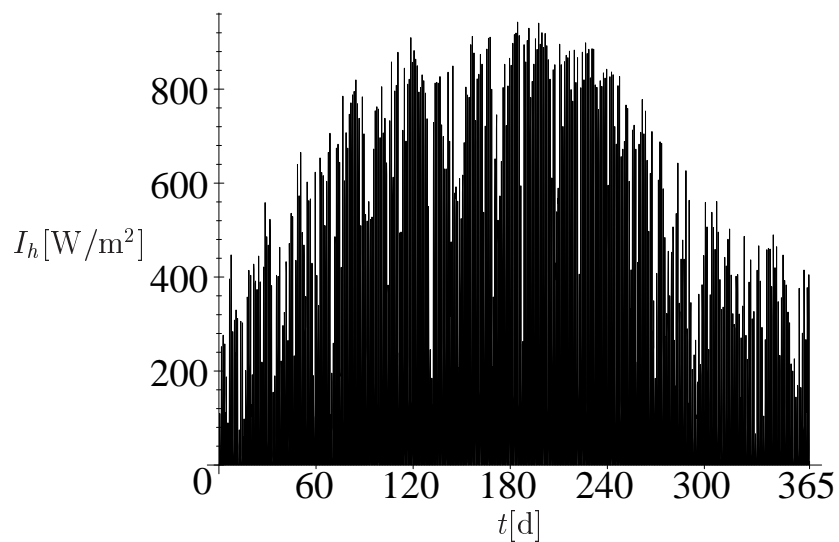


Figura 6.4: Valores sintetizados da média horária da radiação solar incidente no plano horizontal em Pégões

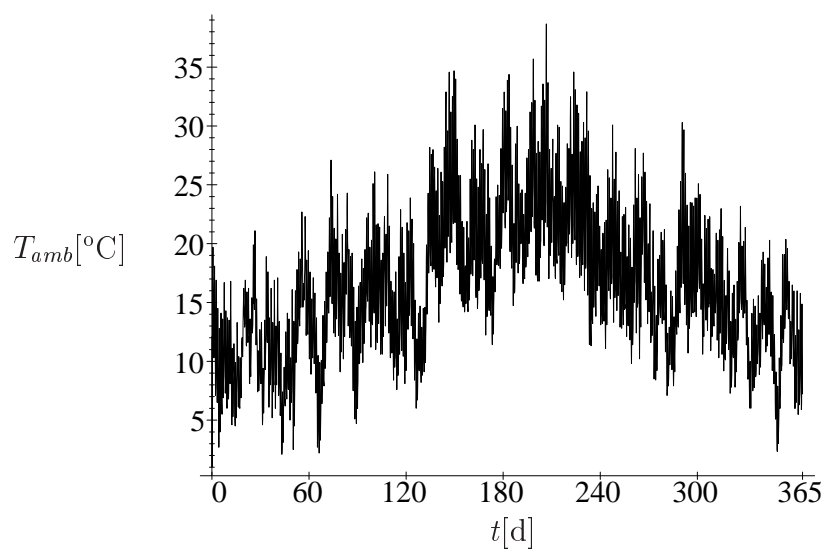


Figura 6.5: Valores sintetizados da Temperatura ambiente em Pégões

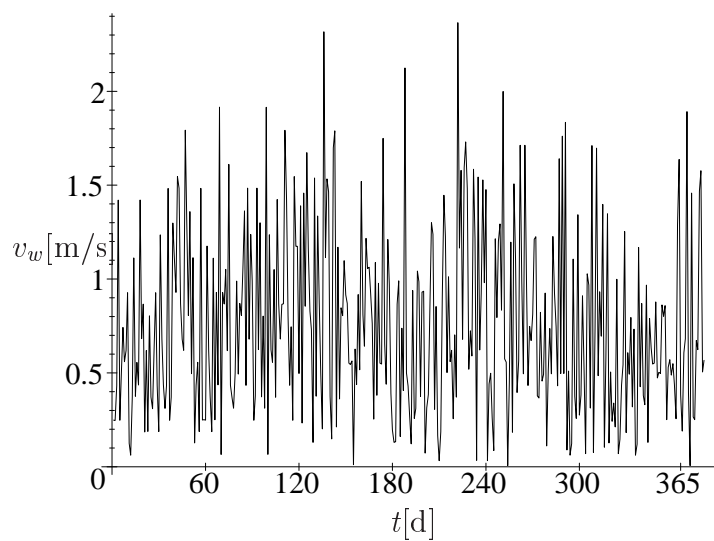


Figura 6.6: Valores sintetizados da Velocidade do vento em Pégões

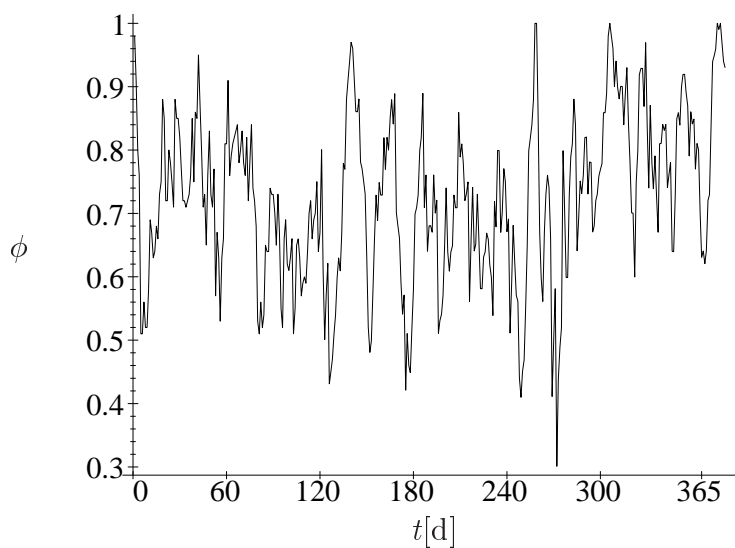


Figura 6.7: Valores sintetizados da Humidade Relativa em Pégões

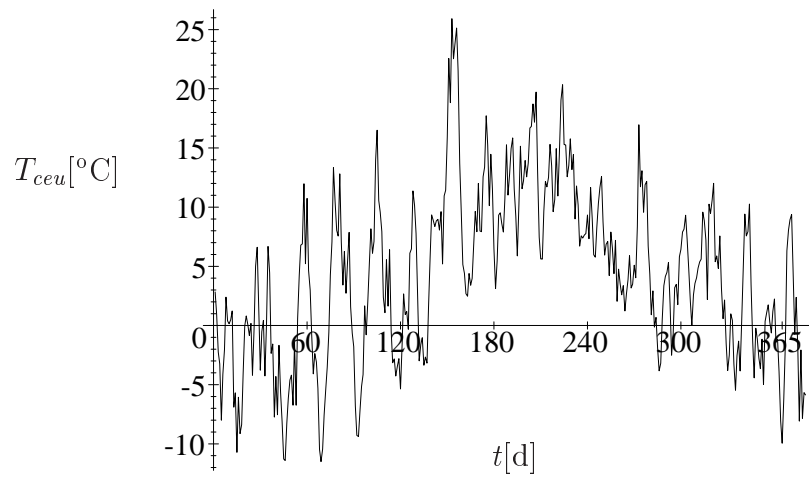


Figura 6.8: Valores sintetizados da Temperatura do céu em Pégões

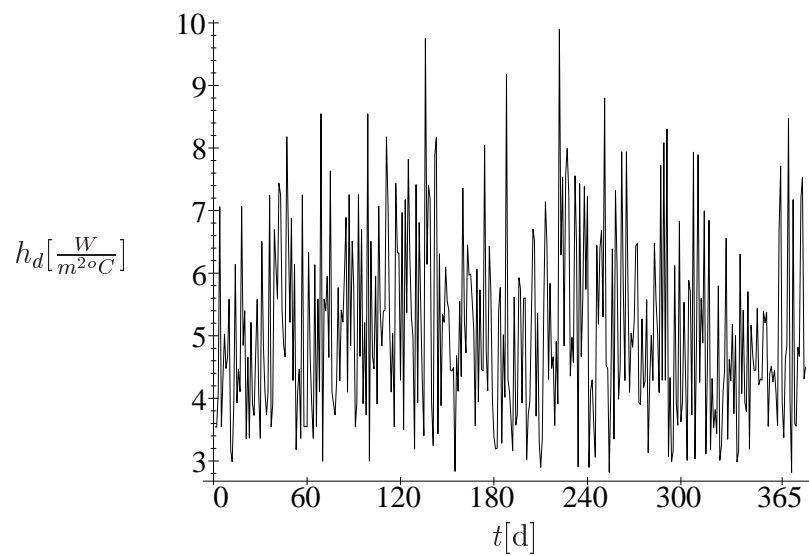


Figura 6.9: Valores sintetizados do Coeficiente de convecção em Pégões

uma vez que $S_d = 0\%$ e $S_0 = 22,5\%$ correspondem respectivamente a $S_d = 0 \text{ Kg/m}^3$ e $S_0 = 230 \text{ Kg/m}^3$ (para uma temperatura média de 50°C).

Como o início do movimento convectivo no Lago é fortemente dependente do campo de salinidade inicialmente imposto, interessa poder considerar diferentes campos iniciais na simulação do comportamento do Lago.

Neste contexto, o presente trabalho analisa a evolução de campos iniciais de salinidade, com diferenciais de concentração de 5%, 10%, 14.6% e 20%.

Para cada um é determinado o conjunto de parâmetros físicos, constituído por K_S , K_T , ρ , C_p , ν , α e β , através da Tabela das propriedades das Soluções Aquosas de Cloreto de Sódio, apresentada no Apêndice B, tomando o valor médio do campo de salinidade em causa e uma temperatura média que se admite ser igual a 50°C , com o Lago em funcionamento.

Por exemplo, para o campo que corresponde a um diferencial de 20% dado por $S_i = 226(1 - z/d)$ o cálculo dos respectivos parâmetros físicos é feito considerando $S = 10\%$ e $T = 50^\circ\text{C}$. A partir dos valores para a temperatura e para a salinidade, da leitura da Tabela tiram-se os valores; $\nu = 0.62 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $K_S = 2.63 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, e analogamente para todos os restantes parâmetros.

As Tabelas 6.3 e 6.4 referem os campos que serão considerados e o respectivo conjunto de parâmetros físicos.

	$S_i = 51 \left(1 - \frac{z}{d}\right)$	$S_i = 102 \left(1 - \frac{z}{d}\right)$
K_S	$2.67 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.57 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
K_T	$1.57 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$1.58 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
ν	$0.57 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$0.58 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
α	$4.45 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$4.3 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
β	$0.67 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$	$0.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$
ρ	$1005 \text{ kg}/\text{m}^3$	$1021 \text{ kg}/\text{m}^3$
C_p	$4060 \text{ J}/\text{kg}^\circ\text{C}$	$3940 \text{ J}/\text{kg}^\circ\text{C}$
ΔS	Diferencial de 5%	Diferencial de 10%

Tabela 6.3: Perfis iniciais de salinidade a)

	$S_i = 150 \left(1 - \frac{z}{d}\right)$	$S_i = 226 \left(1 - \frac{z}{d}\right)$
K_S	$2.68 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.63 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
K_T	$1.61 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$1.60 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
ν	$0.60 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$0.62 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
α	$4.43 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$4.6 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
β	$0.635 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$	$0.62 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$
ρ	$1038 \text{ kg}/\text{m}^3$	$1055 \text{ kg}/\text{m}^3$
C_p	$3840 \text{ J}/\text{kg}^\circ\text{C}$	$3740 \text{ J}/\text{kg}^\circ\text{C}$
ΔS	Diferencial de 14.6%	Diferencial de 20%

Tabela 6.4: Perfis iniciais de salinidade b)

6.4 Análise de diferentes perfis iniciais de salinidade

O modelo desenvolvido será utilizado para analisar o comportamento de uma camada inicialmente não convectiva onde serão impostos diferentes gradientes de salinidade. O domínio a analisar será $\Omega = [0\text{m}, 6\text{m}] \times [0\text{m}, 3\text{m}]$.

Os campos iniciais de salinidade passam a ser designados por S_{in1} , S_{in2} , S_{in3} , S_{in4} , e correspondem aos campos indicados nas Tabelas 6.3 e 6.4, vindo:

$$S_{in1} = 51 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.75)$$

$$S_{in2} = 102 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.76)$$

$$S_{in3} = 150 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.77)$$

$$S_{in4} = 226 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.78)$$

A análise dos resultados obtidos desenrola-se em três vertentes:

1. Primeiro apresenta-se uma análise da evolução anual dos campos de temperatura e de salinidade. Esta análise dá conta do início de convecção retratando a passagem de regime difusivo a convectivo;
2. Segue-se uma análise mais detalhada da zona de transição de regime com a evolução dos campos da temperatura e da salinidade e das linhas de corrente. Este estudo cinge-se a um intervalo de tempo onde se processa a referida transição;
3. Finaliza-se com a variação da geometria do domínio analisando-se a configuração das células de convecção através do traçado das linhas de corrente, para cada situação.

Com o intuito de analisar a dependência da solução no número de funções tentativa (designadas a partir deste momento como modos) foram testadas funções de aproximação comportando diferentes modos (3 a 11).

No caso particular do perfil S_{in1} as funções de aproximação são tomadas com quatro, seis e oito modos. Na análise dos restantes três perfis empregam-se oito modos para as funções de aproximação.

Um segundo tipo de análise diz respeito à zona de transição de regime sendo efectuada uma análise detalhada dos campos de temperatura e de salinidade e das linhas de corrente, num intervalo de tempo situado numa vizinhança do ponto onde se inicia a convecção. Este tipo de análise será designado por "zoom".

A análise de resultados termina apresentando as linhas de corrente respeitantes a diferentes geometrias do domínio Ω (designadas por Ω_1 , Ω_2 e Ω_3) e o perfil inicial de salinidade S_{in2} . Todos os são obtidos com uma tolerância de erro de 10^{-4} .

A Figura 6.10 dá uma ideia da forma como se articula toda esta análise.

Nos gráficos que dizem respeito à temperatura justapõem-se os valores obtidos a diferentes profundidades, por forma a tornar mais fácil a sua comparação. Para uma melhor visualização atribuem-se cores às profundidades, de acordo com o código exposto na Tabela 6.5. A evolução do campo da temperatura é traçado em profundidade uma vez que é na direcção vertical que se estabelece o diferencial de temperatura, a partir do campo inicial uniforme.

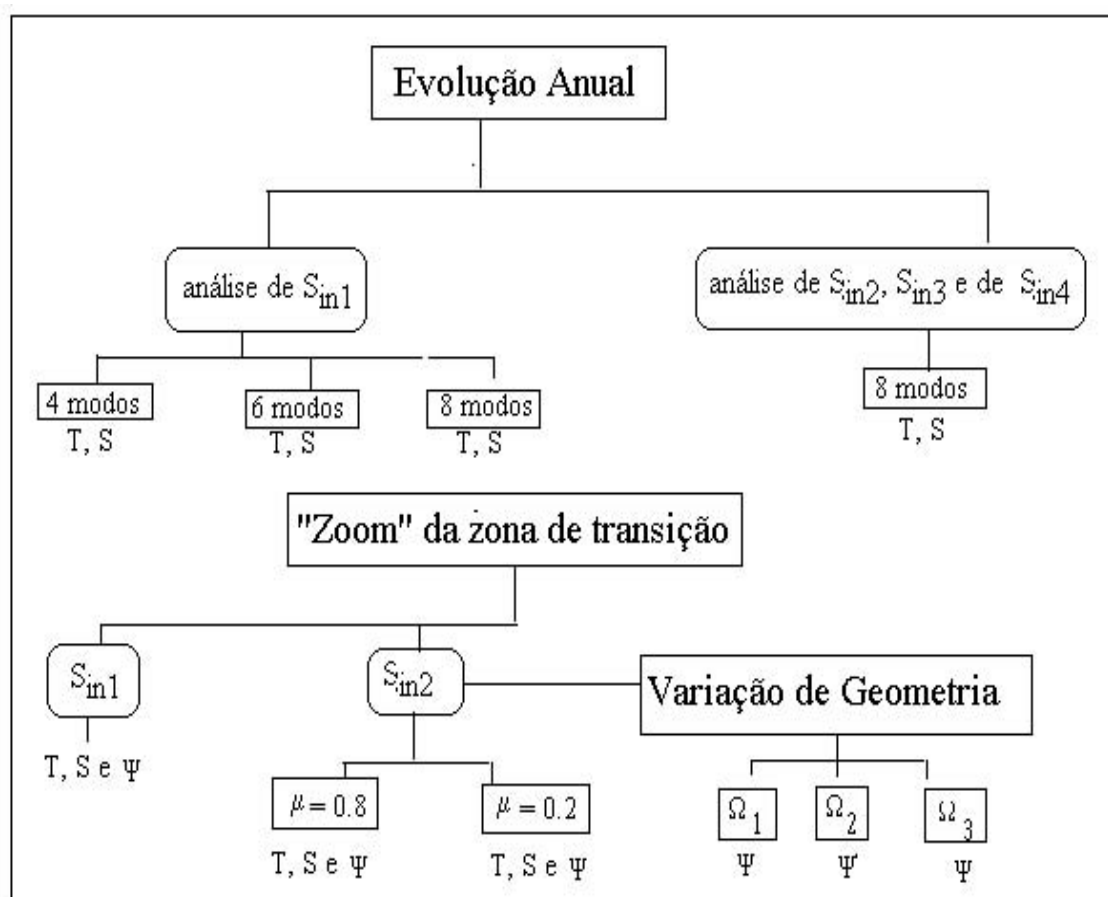


Figura 6.10: Estrutura da análise de resultados

	$z = 0$ m	$z = 1$ m	$z = 2$ m	$z = 3$ m
Temperatura	amarelo	azul	verde	encarnado
Salinidade	azul	-	-	encarnado

Tabela 6.5: Código de cores

A evolução anual da salinidade é apresentada na fronteira inferior e na fronteira superior. A evolução das duas variáveis, T e S é feita para o ponto médio do comprimento de domínio, neste caso $x = 3$ m.

6.4.1 Evolução anual considerando o perfil inicial de salinidade

S_{in1}

Nesta subsecção apresentam-se os resultados da evolução do campo da temperatura e do campo da salinidade ao longo de um ano admitindo que as variáveis T , S e ψ são aproximadas por expansões com quatro, seis e oito modos, no sistema (6.7)-(6.9).

Desenvolvimento a 4 modos

A Figura 6.11 mostra a evolução do campo das temperaturas considerando S_{in1} . Da

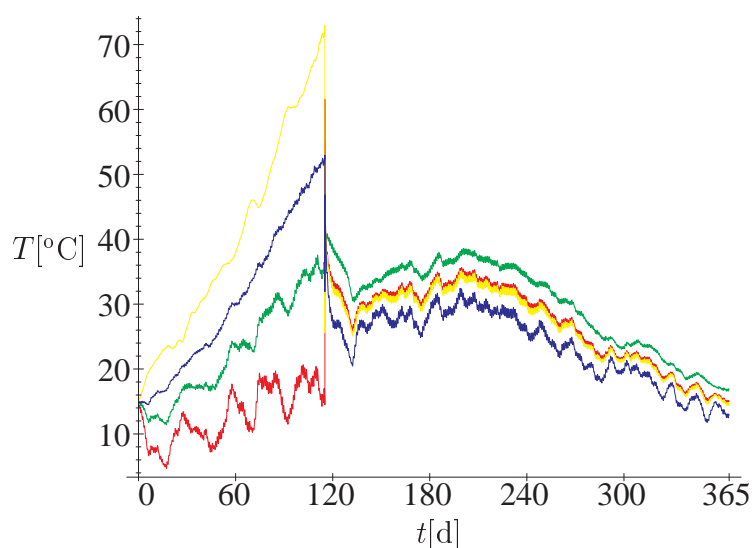


Figura 6.11: Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 4 modos), S_{in1}

observação desta Figura ressalta que o aquecimento devido à absorção de radiação se faz sentir com mais incidência na zona inferior do Lago, onde são atingidos os valores mais elevados da temperatura. Os valores mais baixos, por seu lado, são atingidos na zona superior, em $z = 3$ m, zona onde a evolução da temperatura acompanha praticamente a evolução da temperatura do meio ambiente exibida na Figura 6.5, enquanto o Lago se encontra em regime difusivo. Esta evolução é atenuada com a profundidade: a uma altura $z = 2$ m ainda se faz sentir o efeito do meio ambiente, curva a verde, mas a 1 m de altura essa influência deixa de se fazer sentir.

A partir da Figura 6.11 conclui-se que o início de instabilidades ocorre por volta do dia 98 após o Lago ter entrado em funcionamento, atingindo a temperatura nessa data o valor máximo de 73°C . No momento em que o regime deixa de ser difusivo puro e o valor da velocidade deixa de ser igual a zero, dá-se uma elevação brusca no valor da temperatura em $z = 3$ m, decaindo esse valor, quase de imediato, passando o Lago a um

regime de convecção estacionária. O período de transição será analisado posteriormente, mais em detalhe (secção 6.5) considerando o desenvolvimento a oito modos das funções de aproximação.

Uma vez ultrapassado o período de instabilidades, em regime de convecção estacionária, a temperatura volta a acompanhar a evolução da temperatura média ambiente, existindo contudo uma diferença de 10°C entre o valor da temperatura em $z = 1\text{ m}$ e $z = 2\text{ m}$. Esta diferença deve-se a alguma imprecisão numérica. (Note-se que no modelo com um desenvolvimento com três modos, o Lago não chega a convectar).

A Figura 6.12 apresenta a evolução da salinidade quer na fronteira superior, quer na fronteira inferior. Observa-se que em $z = 3\text{ m}$ o valor inicial da concentração salina que é de 10 kg/m^3 dispara, na zona de início de instabilidades, para mais de 40 kg/m^3 estabilizando quase de seguida em cerca de 30 kg/m^3 (valor que corresponde sensivelmente à média dos valores de concentração salina inicialmente impostos nas fronteiras).

Na fronteira inferior onde a concentração salina é inicialmente superior, 51 kg/m^3 após um rápido decréscimo esse valor decai para 30 kg/m^3 . Estando o perfil inicial compreendido entre $S_d = 51\text{ kg/m}^3$ e $S_0 = 8\text{ kg/m}^3$ o conjunto de valores tomados pela salinidade encontra-se sempre dentro desse intervalo. Refira-se que os valores atingidos pela concentração salina, em ambas as fronteiras, no início das instabilidades, pode corresponder a uma instabilidade numérica uma vez que esses valores apenas são atingidos durante escassos segundos. Na realidade os valores extremos da concentração salina disparam quando se inicia o movimento oscilatório mas estacionam no valor médio de 30 kg/m^3 .

À medida que o Lago vai sendo aquecido, a concentração salina diminui na fronteira inferior por difusão, até ao ponto em que o gradiente de salinidade já não sustem o gradiente térmico, havendo uma inversão da inclinação do gradiente salino que é totalmente destruído. O valor da concentração salina decai abruptamente até que, após a homogeneização do Lago, com a uniformização da temperatura, o mesmo acontece à salinidade.

Na fronteira superior, o processo dá-se de uma forma inversa, isto é o valor da concentração salina, que é inicialmente mais baixo, começa por ir subindo lentamente durante o regime difusivo até que, após o período de instabilidades, o valor do campo da salinidade fica uniforme.

A Figura 6.13 mostra as permutas térmicas que ocorrem na fronteira superior. Enquanto o Lago se encontra em regime difusivo o valor global das perdas pela superfície não ultrapassa os 200 W/m^2 sendo as perdas radiativas e convectivas da mesma ordem de grandeza, (100 W/m^2) e variando as perdas por evaporação de 150 W/m^2 a 200 W/m^2 . No início das instabilidades todos estes valores sobem consideravelmente, sendo as perdas por evaporação de longe as mais elevadas, chegando a atingir um valor de cerca de 1200 W/m^2 . Ultrapassado o período de transição e uma vez em regime convectivo estacionário todas as perdas referidas passam a ter um valor superior ao apresentado em regime difusivo, mas inferior ao atingido na zona instável. Em regime convectivo o valor das perdas por convecção e radiação aumenta para 150 W/m^2 e o valor das perdas evaporativas passa a variar entre 400 W/m^2 e 600 W/m^2 .

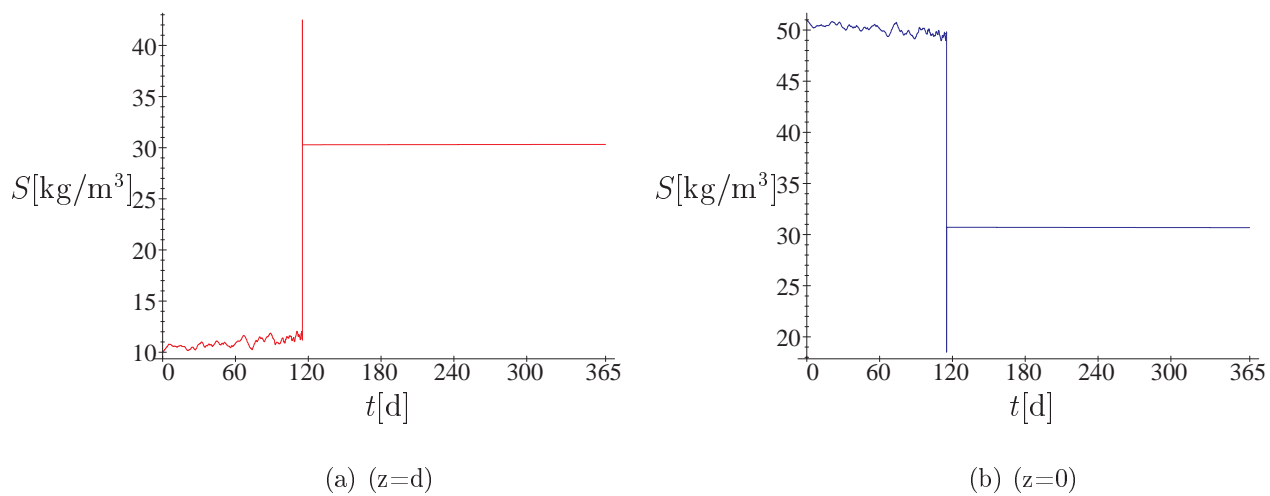


Figura 6.12: Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 4 modos), S_{in1}

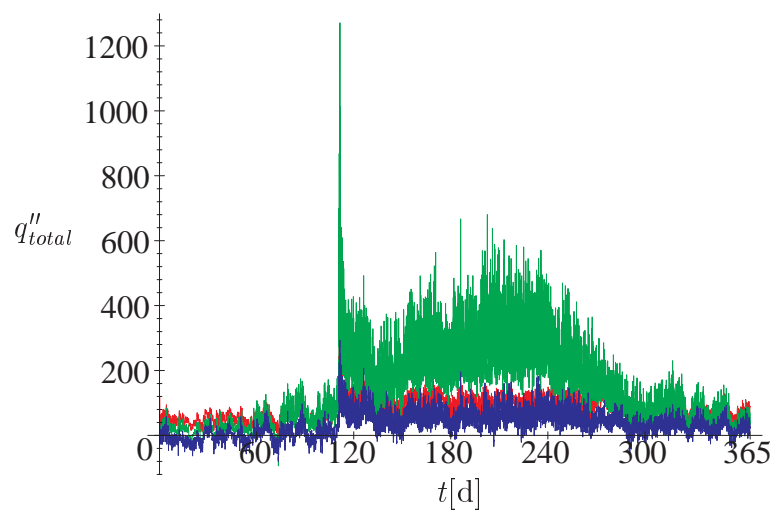


Figura 6.13: Permutas térmicas em $z = d$ (modelo a 4 modos), S_{in1}

Desenvolvimento a 6 modos

Aumentando o número de modos nas funções de aproximação dos campos em análise é natural que o modelo traduza melhor o comportamento do Lago. A Figura 6.14 mostra

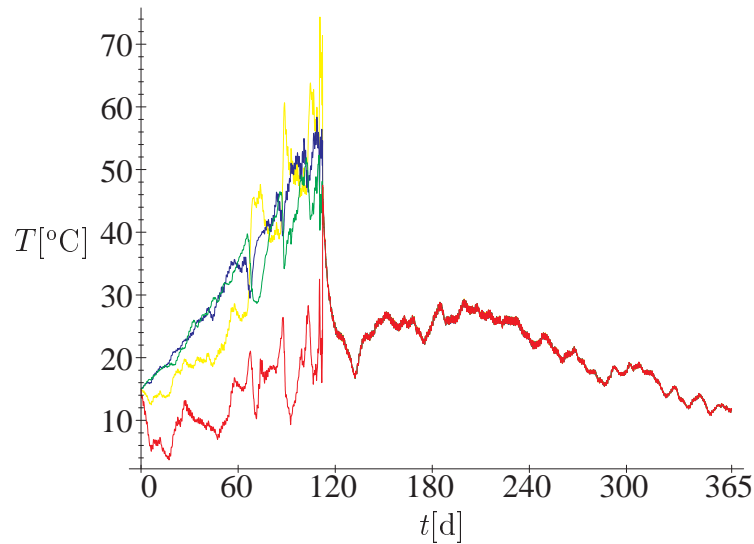


Figura 6.14: Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 6 modos), S_{in1}

claramente que, enquanto em o regime difusivo, o valor da temperatura varia com a profundidade, reflectindo o efeito da absorção de radiação, em regime convectivo, o campo da temperatura fica uniforme. Na realidade, após se dar o início das instabilidades o Lago entra num período de transição ao fim do qual ocorre uma uniformização quer do campo da temperatura quer do campo da salinidade. Enquanto a Figura 6.11 (desenvolvimento a quatro modos) apresenta uma diferença de cerca de 10°C no valor da temperatura a diferentes profundidades, em regime convectivo, a Figura 6.14 reflecte a uniformização do campo da temperatura em regime convectivo a diferentes profundidades.

Observe-se que existe uma "tentativa" de homogeneização do campo da temperatura por volta do dia 67 a qual só é contudo, conseguida por volta do dia 100, uma vez que o gradiente térmico não foi suficientemente forte para destruir o gradiente salino. Esta situação está bem clara na Figura 6.15 a qual apresenta a evolução do campo da salinidade nas fronteiras superior e inferior sendo visível a homogeneização, após a ocorrência da instabilidade, com um valor de concentração salina de 30 kg/m^3 . Durante o período de instabilidade a concentração salina apresenta oscilações da ordem dos 10 kg/m^3 .

Constata-se que com um desenvolvimento a seis modos o início da convecção ocorre mais cedo do que com um desenvolvimento a quatro modos. Tendo em conta que o perfil inicial de salinidade é $S_{in1} = 51(1 - z/d)$ não é de estranhar que a mudança de regime se dê relativamente cedo. O perfil inicial considerado revela-se insuficiente para aguentar o gradiente de temperatura que se estabelece, e que desestabiliza rapidamente o Lago.

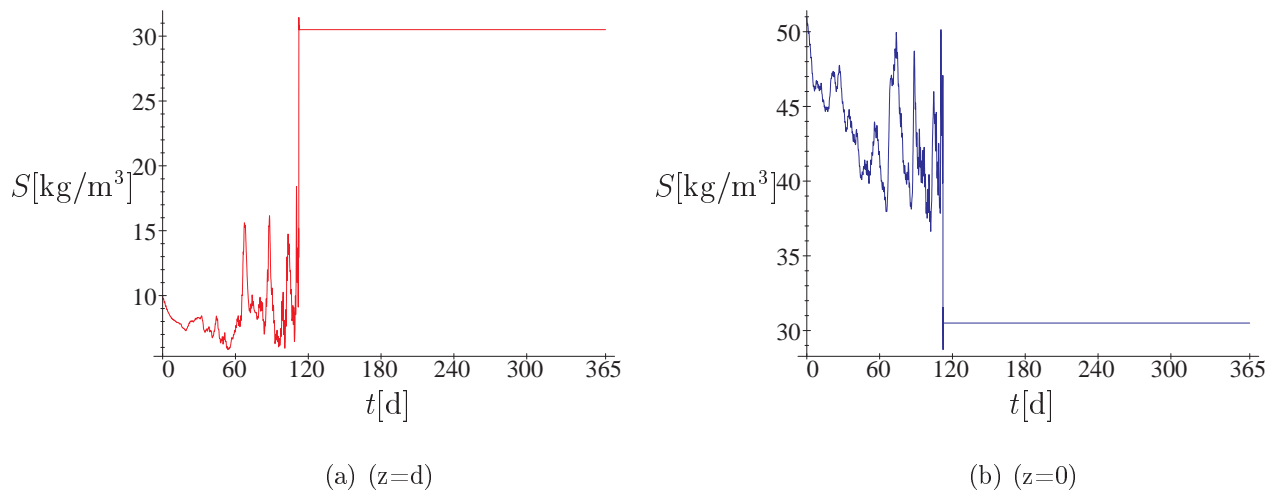


Figura 6.15: Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 6 modos), S_{in1}

Desenvolvimento a 8 modos

Para um desenvolvimento com oito modos obtém-se, para a evolução da temperatura a Figura 6.16 segundo a qual o início de convecção ocorre no dia 57 após o início do

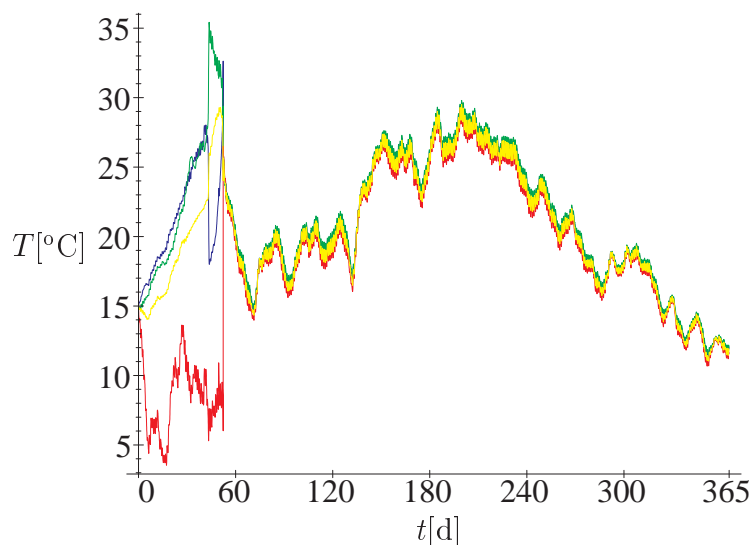


Figura 6.16: Evolução do perfil de Temperatura (modelo a 8 modos), S_{in1}

funcionamento do Lago, logo mais cedo do que no modelo a seis modos. A diferença de data de início de convecção é de 10 dias, ou seja, é inferior à diferença de data observada entre o modelo a quatro e a seis modos (30 dias), o que aponta para uma convergência de data de início de convecção mais cedo do que a inicialmente proposta pelo desenvolvimento

a quatro modos. De uma forma análoga ao modelo a seis modos, o campo da temperatura uniformiza-se em regime convectivo. O valor que a temperatura atinge no ponto de início de convecção é contudo mais baixa do que no modelo a seis modos, cerca de 35°C . Da análise da Figura 6.16 pode concluir-se que, em regime difusivo, as temperaturas mais altas são atingidas entre $z = 1\text{ m}$ a $z = 2$, seguindo-se a temperatura em $z = 0\text{ m}$.

Verifica-se que ao fim de um certo período de funcionamento as zonas mais quentes começam por se uniformizar, isto é, os valores atingidos em $z = 1\text{ m}$ e $z = 2\text{ m}$ tendem a aproximar-se, até que se sobrepõem. De seguida é a vez da zona ao nível do solo se uniformizar com a camada imediatamente acima. Só numa terceira fase é que ocorre a uniformização total. Tudo aponta pois para que a uniformização do campo das temperaturas se dê por patamares (o que está de acordo com a ideia apontada por Turner (1985)), dando a Figura 6.16 uma ideia destas três fases de homogeneização. Quando se dá a uniformização completa e o regime passa a ser convectivo, as temperaturas em $z = 1\text{ m}$ e $z = 2\text{ m}$ têm um valor ligeiramente superior (em cerca de 1°C ou 2°C) ao valor da temperatura atingido no solo e à superfície, mas menos elevado que a diferença de 10°C observada no desenvolvimento a quatro modos. De notar que a uniformização do campo da temperatura não ocorre de imediato, logo após o início das instabilidades, mas sim durante um período de tempo onde a transferência de calor e de massa se dá apenas por difusão. Ao fim desse período de tempo estabelece-se o regime convectivo estacionário.

Em relação à evolução da salinidade, Figura 6.17, o comportamento do modelo a oito

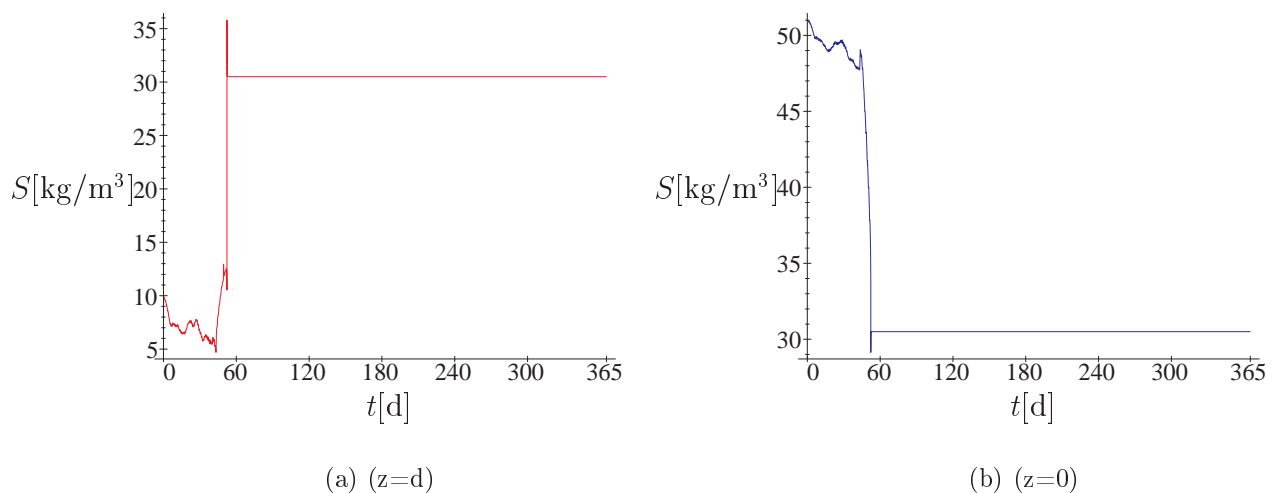


Figura 6.17: Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 8 modos), S_{in1}

modos é análogo ao dos modelos a quatro e a seis modos, estabilizando o valor da concentração em 30 kg/m^3 em regime convectivo. Neste desenvolvimento o gráfico da evolução do campo da salinidade já não evidencia qualquer imprecisão numérica, com valores extremos demasiado elevados e demasiado baixos, como acontecia no desenvolvimento a seis modos.

Conclusão

Dos resultados observados nesta subsecção conclui-se que quando as funções de aproximação apresentam quatro modos o início de convecção ocorre no dia 98. Quando as mesmas funções apresentam um desenvolvimento a seis modos essa data passa a ser o dia 67. A introdução de dois modos nas funções de aproximação, implicou uma alteração de data para o dia 67 e, finalmente, a introdução de mais dois modos conduziu a que o início de convecção se situasse no dia 57.

Constata-se, pois, que à medida que se introduzem modos nas funções de aproximação baixa a data de início de convecção. Para analisar esta dependencia da data de início de convecção do número de modos das funções de aproximação, analisaram-se os resultados obtidos pelo modelos quando se consideram aproximações com três a oito modos, os quais se descrevem na Tabela 6.6. Estes resultados foram obtidos impondo uma tolerância de

Número de modos das aproximações	Data do início de convecção
4	98
5	94
6	67
7	59
8	57

Tabela 6.6: Valores de início de convecção, tolerância de 10^{-7} , S_{in1}

10^{-7} para controlo do erro de integração da rotina numérica.

Por outro lado, o modelo com um desenvolvimento com três modos não convecta, permanecendo em regime difusivo. Em relação ao modelo com um desenvolvimento a nove modos não se conseguem obter resultados com uma tolerância tão pequena, divergindo o processo de integração numérica.

Os valores da data do início de convecção, para as aproximações referidas, impondo uma tolerância de 10^{-4} para controlo do erro à rotina de integração constam da Tabela 6.7. Note-se que com funções de aproximação com desenvolvimentos a seis e a oito modos

Número de modos das aproximações	Data do início de convecção
4	93
6	67
7	59
8	57
9	57

Tabela 6.7: Valores de início de convecção, tolerância de 10^{-4} , S_{in1}

a data de início de convecção continuou igual (pelo menos em termos de dias, dentro do mesmo dia pode haver alguma alteração). Da análise da Tabela 6.7 verifica-se que a partir de desenvolvimentos que considerem sete modos existe convergência para a data

de início de convecção. Por outro lado constatou-se que, a partir de um determinado número de modos, não existe praticamente sensibilidade para o início de convecção por parte do modelo, ao impôr uma tolerância maior ou menor. Por exemplo com funções de aproximação com oito modos o modelo apresenta início de convecção no dia 57, quando se impõem tolerâncias para controlo do erro compreendidas entre 10^{-7} e 10^{-1} , podendo concluir-se que a data de início de convecção é independentemente da tolerância imposta.

Resulta pois que quando se efectua a análise da evolução dos campos da temperatura e da salinidade durante um ano se pode empregar um tolerância mais elevada uma vez que se pretende saber a data do início de convecção e ter uma ideia da evolução do campo da temperatura e do campo da salinidade. Posteriormente, numa análise mais "fina" do modelo, na vizinhança do início de instabilidades dever-se-á impôr uma tolerância menor, para garantir uma maior precisão dos resultados.

As análises que se seguem empregam funções de aproximação com oito modos. Esta escolha baseou-se no facto de este ser o maior número de termos susceptível de ser tratado computacionalmente.

As análises efectuadas com nove e dez termos por um lado conduziam a resultados análogos em termos de início de convecção e por outro são muito "pesadas" do ponto de vista computacional, demorando os cálculos intermédios cerca de cinco vezes mais do que os mesmos cálculos empregando desenvolvimentos com oito modos.

6.4.2 Evolução anual considerando os perfis iniciais de salinidade dados por S_{in2} , S_{in3} , S_{in4}

Quanto maior for o gradiente de salinidade inicial mais tarde se inicia o processo convectivo. Na secção anterior verificou-se que para um campo inicial de salinidade com um diferencial de 5% (correspondente a $S_{in1} = 51(1 - z/d)$) o início de convecção ocorre por volta do dia 50. Apresentam-se de seguida as evoluções do campo da temperatura considerando os diferenciais de salinidade de 10% (correspondente a $S_{in2} = 102(1 - z/d)$), 14.6% (correspondente a $S_{in3} = 150(1 - z/d)$) e 20% (correspondente a $S_{in4} = 226(1 - z/d)$). A Figura 6.18 mostra a evolução da temperatura quando se considera o campo inicial de salinidade S_{in2} (correspondente a um diferencial de 10%) verificando-se que o início de convecção se dá no dia 116, atingindo a temperatura um valor máximo de 73°C . A evolução às diferentes alturas é idêntica à evolução observada com S_{in1} : as temperaturas mais elevadas são atingidas em $z = 1\text{ m}$ e $z = 2\text{ m}$, as quais se uniformizam numa primeira fase, seguindo-se a temperatura em $z = 0\text{ m}$. A última zona a uniformizar é a zona superficial, onde a temperatura atingida é mais baixa. A Figura 6.19 refere a evolução do campo da salinidade, verificando-se que a concentração salina em regime convectivo uniformiza com um valor de cerca de 58 kg/m^3 , em ambas as fronteiras após ter sofrido uma subida/descida brusca na fronteira superior/inferior na zona de início de convecção.

Para um diferencial de 14,6%, Figura 6.20, o início de convecção ocorre por volta do dia 175, com uma temperatura máxima muito próxima dos 100°C . A homogeneização da temperatura em regime convectivo está ainda bem explícita nesta figura, havendo uma sobreposição quase total do valor da temperatura às diferentes profundidades.

O mesmo já não se passa em relação ao diferencial de 20%, mais adverso ao início do movimento convectivo, o qual ocorre só no 2º ano após o início do funcionamento do Lago, tendo a temperatura atingido valores superiores a 100°C , Figura 6.21. Esta figura é apresentada para ilustrar a forma como um maior diferencial de salinidade conduz a

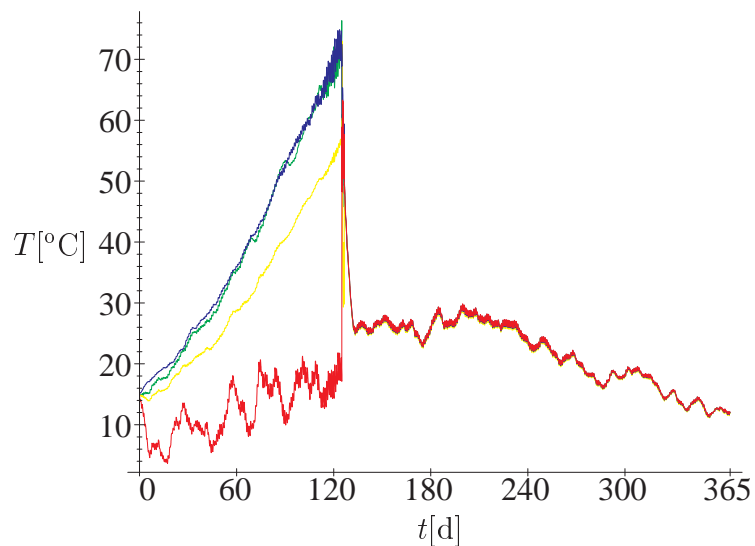
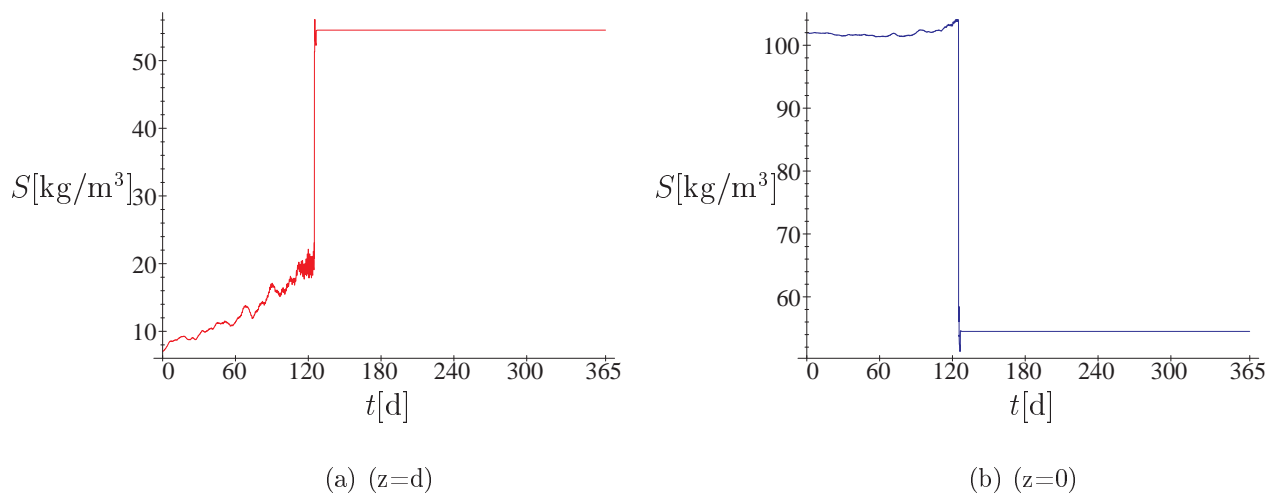


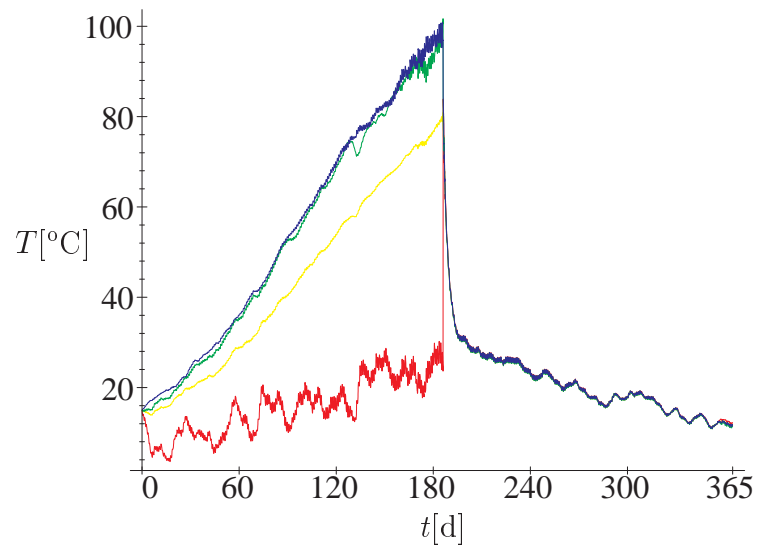
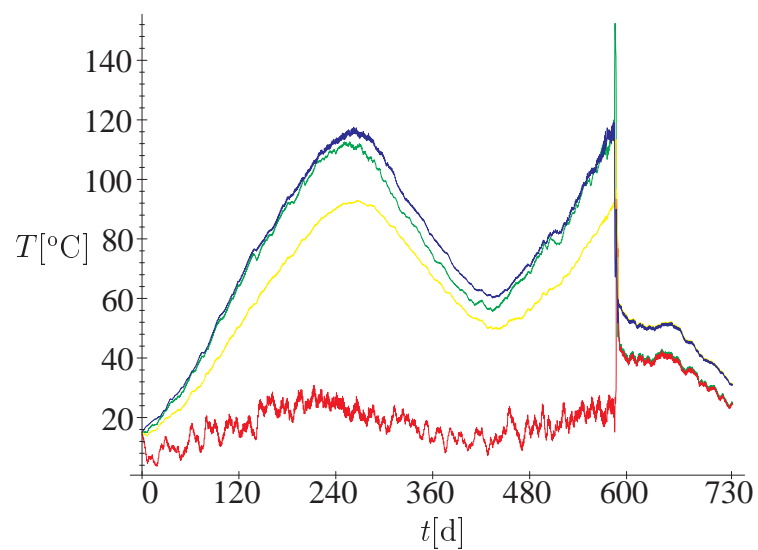
Figura 6.18: Evolução do perfil de Temperatura, S_{in2}



(a) ($z=d$)

(b) ($z=0$)

Figura 6.19: Evolução do perfil de Salinidade (modelo a 8 modos), (S_{in2})

Figura 6.20: Evolução do perfil de Temperatura, S_{in3} Figura 6.21: Evolução do perfil de Temperatura, S_{in4}

um atraso no início de convecção. Os valores das temperaturas apresentados não têm qualquer significado, uma vez que, numa situação real, antes que a temperatura atingisse os 100 °C teria que haver extracção de energia para impedir a ebulição. Refira-se, porém, que este fenómeno poderá de facto acontecer tendo havido pelo menos uma ocorrência no Lago de Miamisburg (Wittenberg and Harris (1980)) onde se verificou esta situação.

6.5 Análise dos resultados obtidos na zona de transição

Até agora apresentou-se a evolução dos campos da temperatura e da salinidade, considerando quatro, seis e oito modos nas funções de aproximação das variáveis T , S e ψ admitindo um campo inicial de concentração de 5%. Para a aproximação a oito modos efectuou-se igualmente a visualização do campo da temperatura para diferenciais de salinidade de 10%, 14.6% e 20%. Com base nas figuras exibidas tem-se uma ideia do comportamento do Lago ao longo de um ano e detecta-se a data em que ocorre a mudança de regime.

As secções que se seguem têm como objectivo detalhar a transição de regime difusivo para convectivo, em termos do comportamento dos campos de temperatura e de salinidade, e em termos das linhas de corrente numa vizinhança do ponto de instabilidade.

Este detalhe consegue-se fazendo um "zoom" à zona onde se verifica o início de instabilidade. Para tal consideram-se como condições iniciais os valores obtidos imediatamente antes do ponto de inversão dos perfis e efectua-se o refinamento do modelo, impondo um passo de integração mais apertado, (tipicamente passa-se da escala da "hora" para a escala do "segundo").

Algumas das conclusões que se seguem da análise circunscrita a uma vizinhança do ponto onde se iniciam as instabilidades, só podem ser tiradas quando complementadas com a informação proveniente da animação das situações que se seguem. Só a análise dinâmica da evolução dos campos e das linhas de corrente possibilita inferir alguns resultados, como seja, saber onde começa uma dada configuração de um campo de temperatura e como a mesma acaba, ao fim de um dado período de tempo.

6.5.1 Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in1}

O modelo que se analisa nesta secção assume um desenvolvimento das funções de aproximação com oito modos e um gradiente inicial de salinidade de 5%, ou seja, a recta que traduz o perfil inicial tem um declive pouco acentuado.

Zoom do campo das temperaturas

Na Figura 6.22 observa-se a evolução do campo da temperatura durante um intervalo de tempo próximo do ponto de convecção. Os gráficos da evolução do campo da temperatura são traçados fazendo uma partição do intervalo $[0, d] = [0, 3 \text{ m}]$ obtendo-se subintervalos de comprimento igual a 20 cm, após o que se calculou o valor da temperatura em cada extremo dos subintervalos por forma a ser possível obter um gráfico (T, z) .

A evolução do campo de temperaturas não é claramente perceptível neste tipo de representação gráfica, uma vez que se sobrepõem diferentes retratos do campo para diferentes instantes, no mesmo gráfico. No entanto, e como já se referiu, é possível tirar algumas conclusões quando esta análise se complementa com a animação da figura. Para

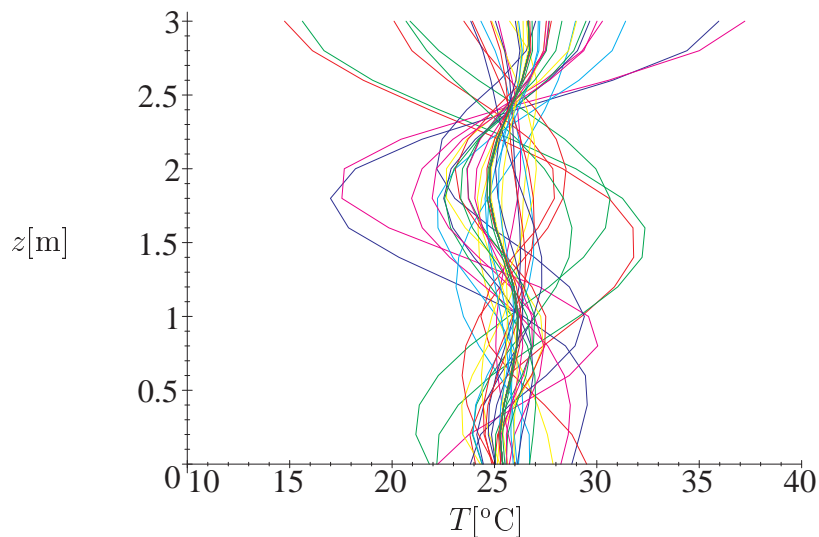


Figura 6.22: Perfis de Temperatura (S_{in1}), observados durante 20 mn do dia 54

se ter uma ideia de onde começa cada uma destas evoluções a Figura 6.22 é complementada por três figuras referentes às situações de início, meio e fim do intervalo de tempo analisado. A Figura 6.23 refere a fase inicial e a Figura 6.24 as fases intermédia e final do

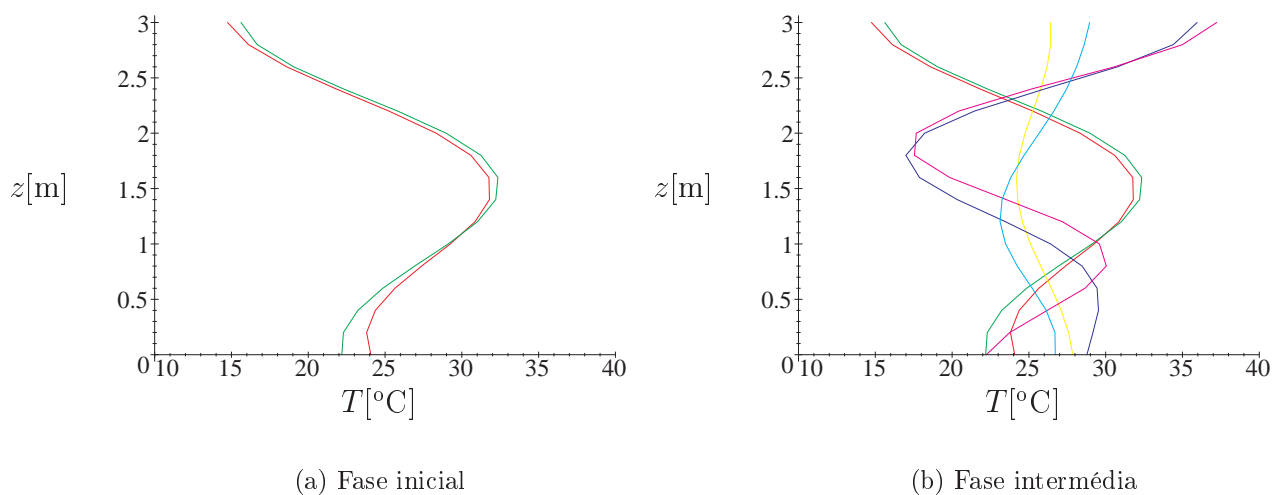


Figura 6.23: Evolução do perfil de Temperatura: a) fase inicial, b) fase intermédia

intervalo de tempo analisado.

Neste caso, o campo de temperatura parte de uma posição situada nos 15 mn do dia 54 com um declive negativo na parte superior do domínio, Figura 6.23 a) oscila com uma amplitude de cerca de 15°C , Figura 6.23 b), acabando por ficar quase vertical, Figura 6.24, ao fim de cerca de 20 minutos (curvas centrais em torno do valor 25°C).

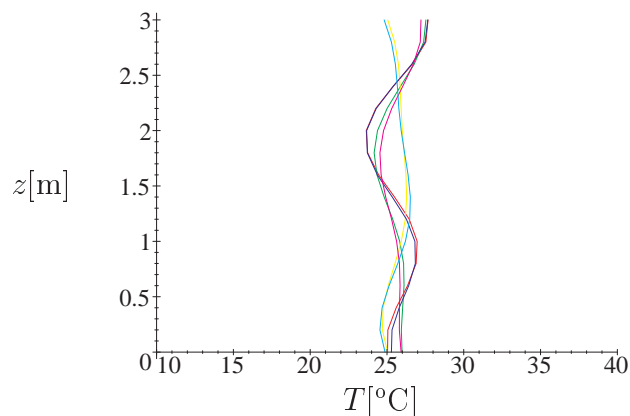


Figura 6.24: Evolução do perfil de Temperatura, fase final

Zoom do campo da salinidade

A evolução do campo da salinidade para a situação S_{in1} com o modelo a 8 modos, para o mesmo intervalo de tempo consta da Figura 6.25, podendo inferir-se alguns resultados

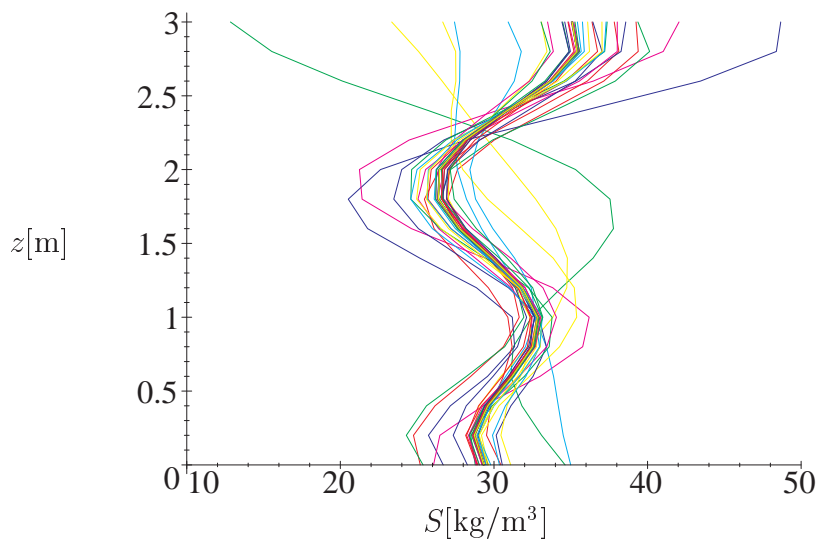


Figura 6.25: Perfis de Salinidade (S_{in1}), observados durante 20 mn do dia 54

a partir da respectiva animação. Assim, pode dizer-se que o campo de salinidade que às 3 h do dia 54 é quase vertical oscila com uma amplitude de 20 kg/m^3 , excepto na situação extrema (curvas a azul e verde onde são atingidos valores de 5 kg/m^3 e 48 kg/m^3). Esta situação corresponde à situação classificada de imprecisão numérica na Figura 6.17. Após uma subida/descida brusca do valor da concentração salina, até se efectuar a uniformização perto dos 30 kg/m^3 . A Figura 6.25 não abrange a situação final mas evidencia uma tendência para a uniformização, em torno do valor apontado. Já em regime de convecção estacionária o perfil aproxima-se de uma recta vertical.

Zoom do campo das velocidades

As Figuras 6.27 a 6.29 mostram a configuração das linhas de corrente a partir das 15 mn do dia 54 durante cerca de três minutos. Embora seja de interesse traçar todos os gráficos para um mesmo conjunto de isolinhas, por vezes não é possível fazê-lo devido à existência de escalas de velocidade muito diferentes. A Figura 6.26 mostra a relação temporal entre os gráficos de linhas de corrente traçados e indica quais os incrementos considerados para as isolinhas.

Na Figura 6.27 consideram-se isolinhas espaçadas de $0.5 \times 10^{-2} \text{m}^2/\text{s}$ reflectindo o facto de se estar perante velocidades muito baixas, a qual atinge em $t_0 = 15 \text{mn}$ do dia 54 o valor máximo de $0.38 \times 10^{-2} \text{m/s}$. A configuração mostra 6 células bem delimitadas. Refira-se, como observação geral, válida para todos os gráficos de linhas de corrente apresentados neste trabalho, que as cores traduzem a direcção em que rodam as células de convecção.

As Figuras que se seguem estão feitas com um incremento de $0.125 \times 10^{-1} \text{m}^2/\text{s}$ entre as isolinhas. Na Figura 6.28 a) as seis células originais dão origem a duas células verticais. Estas, sendo verticais vão misturar o fluido e na Figura 6.28 b) a configuração vertical degenerou, passando quase a uma configuração horizontal. Nesta figura duas, das cinco células existentes, apresentam um gradiente de velocidades muito intenso, evidenciando a existência de uma zona muito instável.

A Figura 6.29 a) mostra uma configuração onde a velocidade é elevada, existindo duas grandes células e uma mais pequena.

A célula situada no segundo quadrante do domínio apresenta um gradiente de velocidades muito intenso ao qual está associada uma velocidade mais alta, neste caso 0.6m/s . A Figura 6.29 b) mostra as linhas de corrente obtidas em regime convectivo, dia 334, sendo a velocidade máxima de 0.1m/s .

Embora a Figura 6.27 exiba seis células esta configuração corresponde a uma velocidade muito baixa estando o movimento convectivo a iniciar-se. Durante o período de transição as células verticais vão homogeneizar o Lago, que passa a apresentar uma interface a 1.2m de altura. Esta situação sofre uma rotura com a coalescência de duas células na Figura 6.28 b) que dão origem à maior célula da Figura 6.29 a) a qual mostra contudo uma tendencia para voltar à situação inicial mas agora a 1.5m de altura. Na

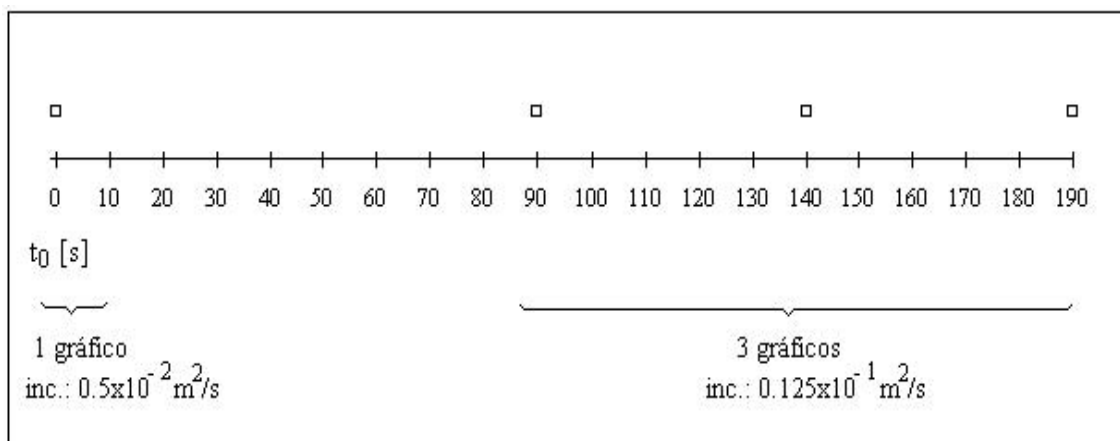


Figura 6.26: Diagrama dos gráficos (ψ) para S_{in1} ($t_0 = 15 \text{mn}$ do dia 54)

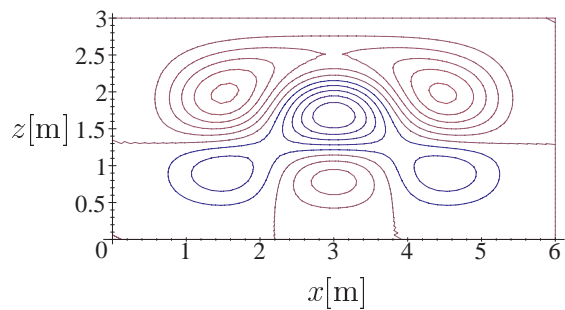
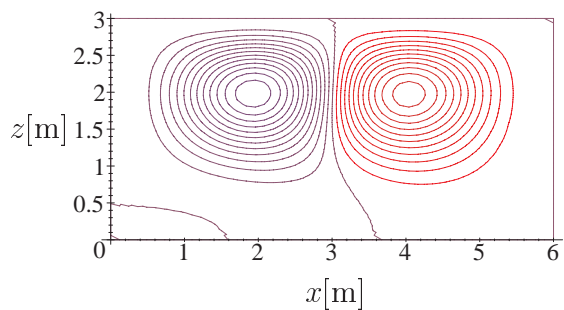
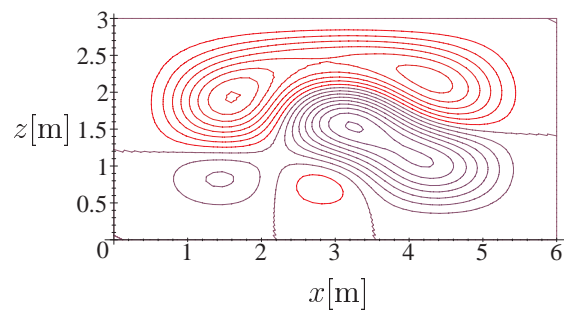


Figura 6.27: Linhas de corrente S_{in1} , $v_{max} = 0.38 \times 10^{-2} \text{m/s}$, $t_0 = 15 \text{mn}$ do dia 54



(a) $v_{max} = 0.24 \text{m/s}$



(b) $v_{max} = 0.3 \text{m/s}$

Figura 6.28: Linhas de corrente S_{in1} : a) $t_0 + 90 \text{s}$, b) $t_0 + 140 \text{s}$

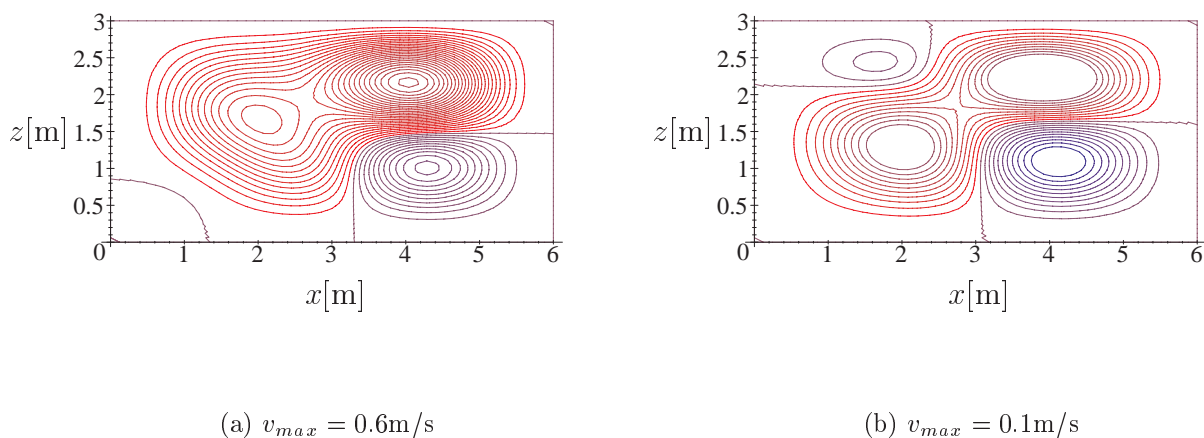


Figura 6.29: Linhas de corrente S_{in1} : a) $t_0 + 190\text{ s}$, b) dia 334

Figura 6.29 b) existem três células principais, duas delas justapostas a 2 m de altura. Esta configuração corresponde à configuração final na situação de convecção estacionária.

Na Figura 6.30 ilustram-se as velocidades máximas obtidas em cada um dos gráficos

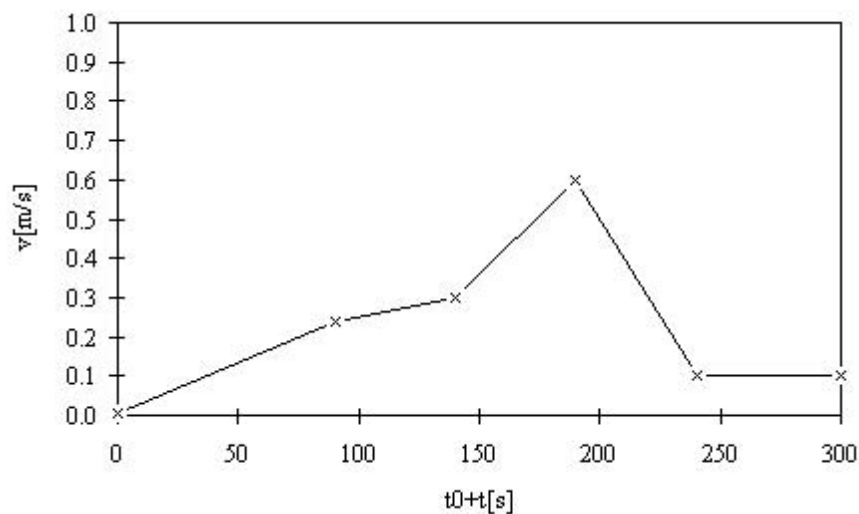


Figura 6.30: Velocidade máxima observada S_{in1}

de linhas de corrente exibidos, sendo o valor mais elevado 0.6 m/s, o qual diminuiu, ao fim de poucos segundos, para um valor muito mais baixo, cerca de 0.1 m/s, valor que será mantido ao longo do regime convectivo.

6.5.2 Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in2} ($\mu = 0.8$)

Como já foi referido optou-se por fazer um estudo mais profundo da mudança de regime quando o modelo é obtido a partir de um desenvolvimento com oito modos das funções de aproximação dos campos da temperatura da salinidade e da função de corrente, admitindo um perfil de salinidade inicial com um diferencial de 10% (e um coeficiente de extinção $\mu = 0.8$).

Tomou-se o campo inicial S_{in2} uma vez que este permite visualizar a mudança de regime durante o primeiro ano de funcionamento. Se o diferencial inicial de salinidade adoptado retardasse o início de convecção o esforço computacional dispendido na modelação seria bastante maior. Embora o campo inicial escolhido não seja o mais corrente nos Lagos Solares em funcionamento, onde os diferenciais de salinidade se situam entre os 20% e os 26%, o facto do modelo não prever extração de energia, (ao contrário da situação real), torna esta opção razoável uma vez que S_{in2} não conduz a temperaturas muito elevadas.

A análise da evolução dos campos de temperatura e de salinidade é feita em três intervalos de tempo situados numa vizinhança do ponto onde se iniciam as instabilidades. Adopta-se este critério dada a impossibilidade de ter uma ideia da variação do campo apenas para um intervalo de tempo. Como a mudança de regime é bastante rápida, podendo a escala de tempo ser inferior ao dia, pretende-se desta forma apanhar num primeiro intervalo o início do período de instabilidades, num segundo intervalo, a zona de grande instabilidade e, finalmente, num terceiro intervalo pretende-se visualizar a evolução dos campos no início do regime convectivo.

A evolução das linhas de corrente não é analisada de acordo com esta divisão, mas apenas numa vizinhança apertada (da ordem dos minutos) do ponto de instabilidade.

Zoom do campo da temperatura

Os intervalos de tempo considerados situam-se no dia 116 após o início do funcionamento do modelo, abrangendo o primeiro que se inicia em $t_0 = 6$ mn do dia 116, cerca de 25 minutos, Figura 6.31. Esta figura mostra várias configurações do campo de temperatura verificando-se que o valor desta oscila em torno dos 55°C . A visualização desta oscilação, apenas possível mediante animação computacional, evidencia a forma como os perfis variam com o tempo, começando por ter um declive acentuado e acabando com uma configuração quase vertical. Como o diferencial de temperaturas mais acentuado se situa na zona superior do domínio (a 1.5 m de altura) é de prever que o movimento convectivo se inicie nessa zona. Durante o período de instabilidades o perfil de temperaturas tem várias concavidades, as quais correspondem às possíveis configurações das células de convecção. A Figura 6.31 é particularmente interessante uma vez que dá ideia das possíveis células de convecção que se poderão justapôr.

A animação desta figura permite ver que a mesma se inicia de forma idêntica à apresentada para o perfil S_{in1} , apresentando a parte superior da figura, a partir de 1.6 m uma inclinação decrescente e a zona inferior uma inclinação positiva. Os perfis traçados, que têm uma oscilação de temperaturas entre os 25°C e os 80°C apenas existem durante alguns minutos, dando-se uma inflexão no sentido da concavidade. Após uma grande oscilação

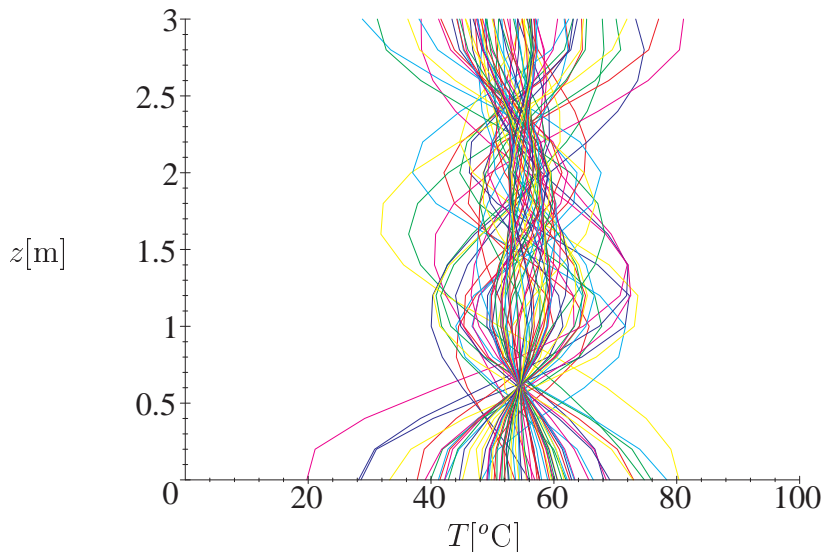


Figura 6.31: Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 25mn (após $t_0 = 15$ mn do dia 116)

patente na Figura 6.31 o campo da temperatura quase uniformiza (curvas centrais).

A Figura 6.32 mostra a evolução do campo de temperaturas 10 minutos após ter decorrido o primeiro intervalo de tempo, abrangendo 35 minutos. Embora haja uma variação no campo da temperatura de cerca de 10°C , verifica-se uma clara tendência para a uniformização das temperaturas, encontrando-se o lago a evoluir para um estado estacionário. Este campo parece evidenciar uma divisão em zonas oscilatórias e "nós" onde a temperatura não varia, sendo clara a ocorrência de um desses "nós" a 50 cm de altura.

Na última Figura 6.33 que se inicia três horas após a Figura 6.32 e abrange um intervalo de tempo de 17 minutos, verifica-se a quase homogeneização da camada, com as curvas dos perfis coincidentes. Esta homogeneização é mais evidente se nos situarmos mais tarde na escala temporal, por exemplo no dia 200.

Zoom do campo da salinidade

Apresentam-se de seguida os gráficos que ilustram a evolução do campo de salinidade, para os mesmos intervalos de tempo utilizados na análise da evolução do campo da temperatura.

De uma forma geral, o andamento do campo de salinidade é análogo ao verificado para a temperatura. Assim, na representação da Figura 6.34 que se inicia ao fim de quinze minutos do dia 116, que corresponde ao intervalo de tempo situado no início das instabilidades, observa-se uma grande variação para os valores extremos que a concentração salina pode tomar. O campo quase vertical no início oscila em torno do valor de 58 kg/m^3 .

A Figura 6.35 que cobre o segundo intervalo de tempo, já apresenta uma oscilação bastante inferior, traduzindo o fim das instabilidades e o início da homogeneização. Finalmente na Figura 6.36 o perfil é praticamente vertical apontando a existência de regime convectivo.

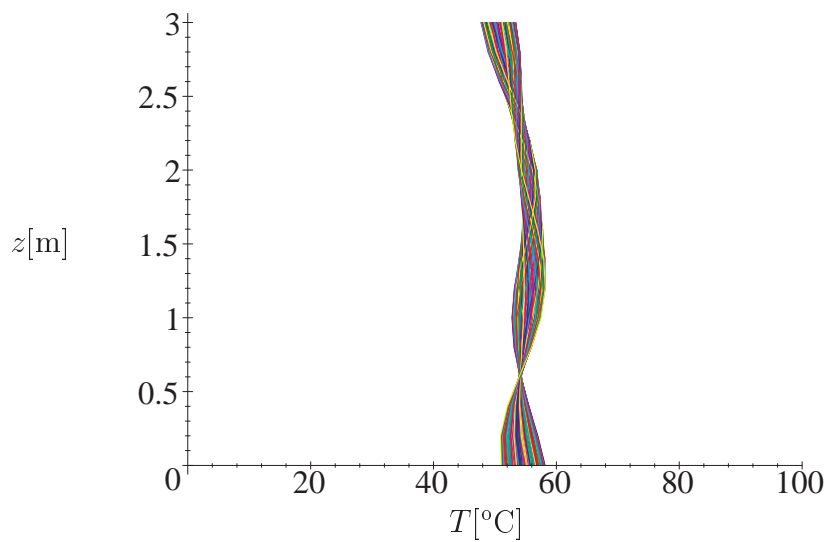


Figura 6.32: Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 35$ mn)

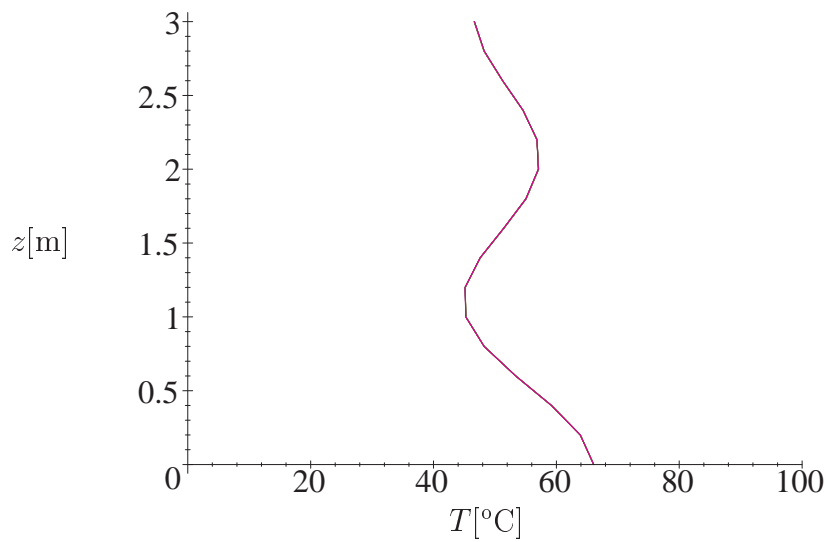


Figura 6.33: Perfis de Temperatura (S_{in2}) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 280$ mn)

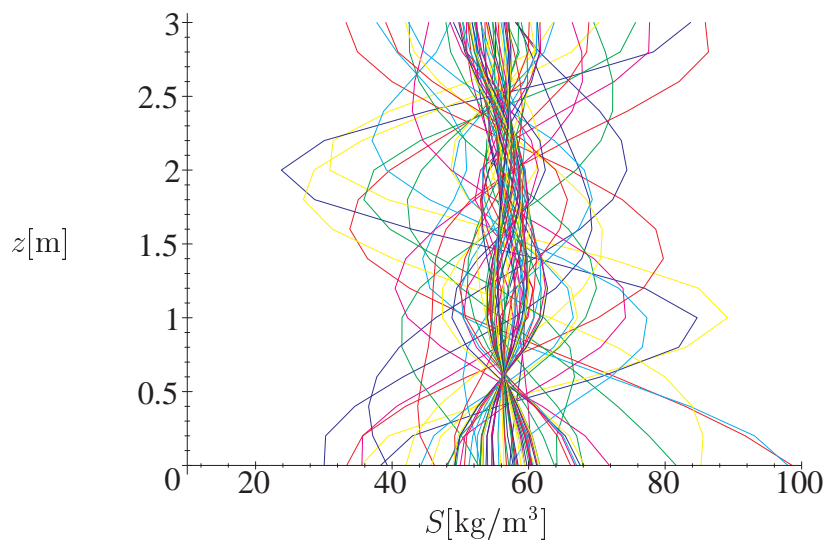


Figura 6.34: Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 25 minutos (após $t_0 = 15$ mn do dia 116)

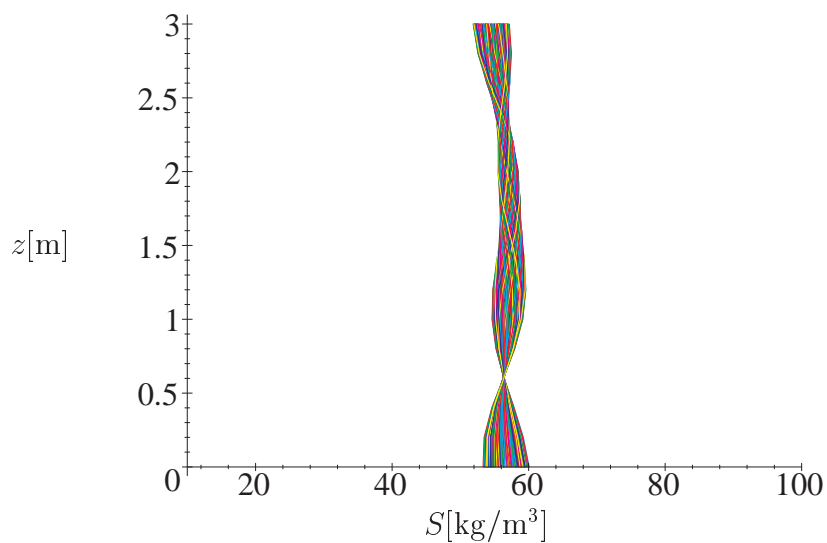


Figura 6.35: Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 35$ mn)

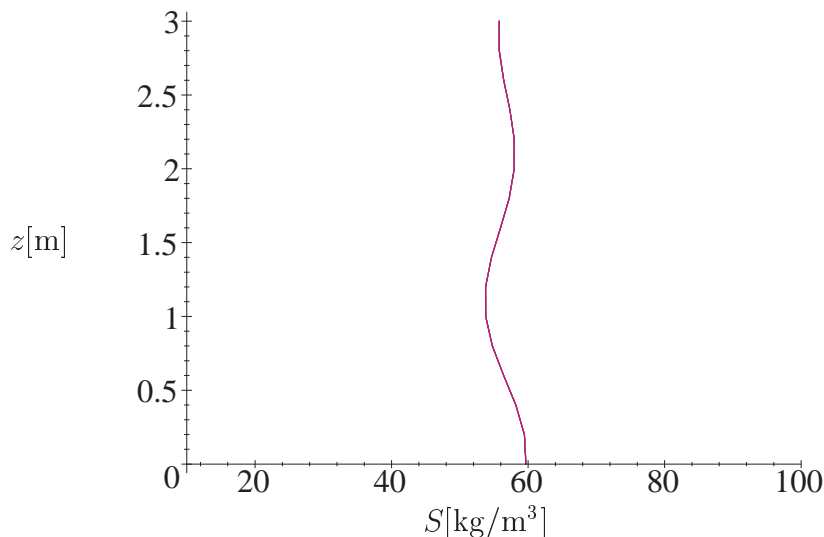


Figura 6.36: Perfis de Salinidade (S_{in2}) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 280$ mn)

Zoom do campo das velocidades

As linhas de corrente que se passam a apresentar dizem respeito ao dia 116 e cobrem cerca de 2 h 15 mn. Para melhor poder captar o aparecimento das células de convecção, o seu desenvolvimento e a respectiva configuração, é necessário considerar três escalas de velocidades diferentes, para as isolinhas. A sua distribuição ao longo das 2 h 15 mn e os incrementos considerados podem ser observados na Figura 6.37.

De acordo com esta figura existe uma zona central (da qual foi feito um "zoom") com dezoito gráficos, em quanto que nas outras duas zonas apenas se apresentam dois a três gráficos. A razão desta diferença está no facto da zona central corresponder a movimento oscilatório, havendo uma enorme diversidade de configurações possíveis para as linhas de corrente por oposição às outras duas zonas. Na primeira ainda se está em regime convectivo embora comecem a desenvolver-se velocidades muito baixas, não variando a configuração das células até ao estabelecimento de movimento oscilatório. Finalmente a última zona já apanha o início do regime convectivo, permanecendo as configurações inalteradas.

Num primeiro grupo de duas configurações, Figura 6.38 as velocidades são muito baixas sendo o incremento entre as isolinhas de $0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. A Figura 6.38 a) apresenta 4 células bem diferenciadas, distribuídas pelos quatro quadrantes do domínio possuindo as células situadas na zona superior do domínio gradientes de velocidade mais intensos, logo velocidade superior. Na Figura 6.38 b) a intensidade do gradiente de velocidade aumenta nas células situadas na zona superior do domínio, indicando que a zona de instabilidade se começa a desenvolver precisamente na parte superior da camada de fluido, o que está de acordo com os resultados da análise do campo da temperatura.

Num segundo grupo de Figuras de 6.39 a 6.48 as linhas de corrente são espaçadas de $0.5 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ e as configurações retratadas neste conjunto de figuras apresentam velocidades que vão de 0.05 m/s a 2 m/s (este último valor só ocorre durante alguns

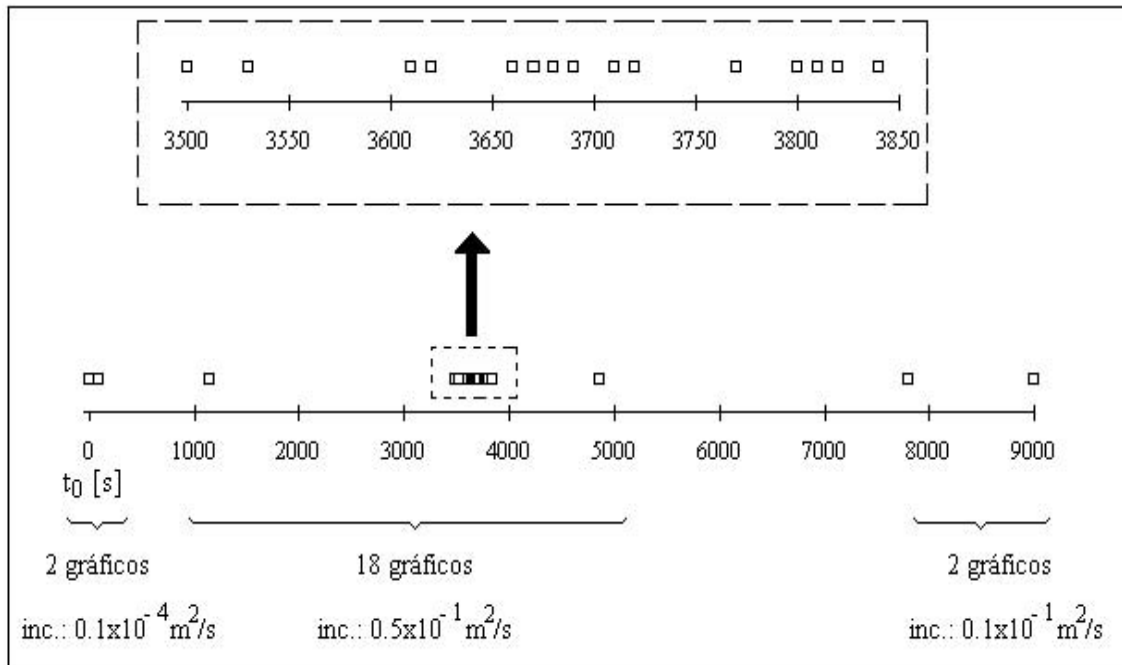
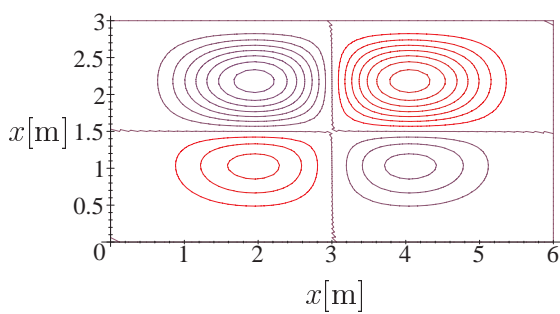
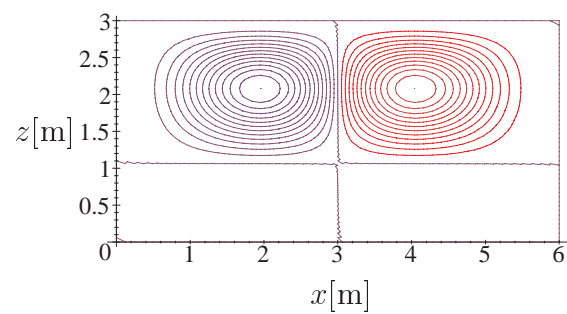


Figura 6.37: Diagrama dos gráficos (ψ) para S_{in2} ($t_0 = 2$ h15 mn do dia 116)



(a) $v_{max} = 0.2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$



(b) $v_{max} = 0.2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$

Figura 6.38: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 = \text{dia 116}$, b) $t_0 + 80 \text{ s}$

segundos).

Na Figura 6.39 a) e b) as velocidades máximas atingidas são, respectivamente, 0.7 m/s

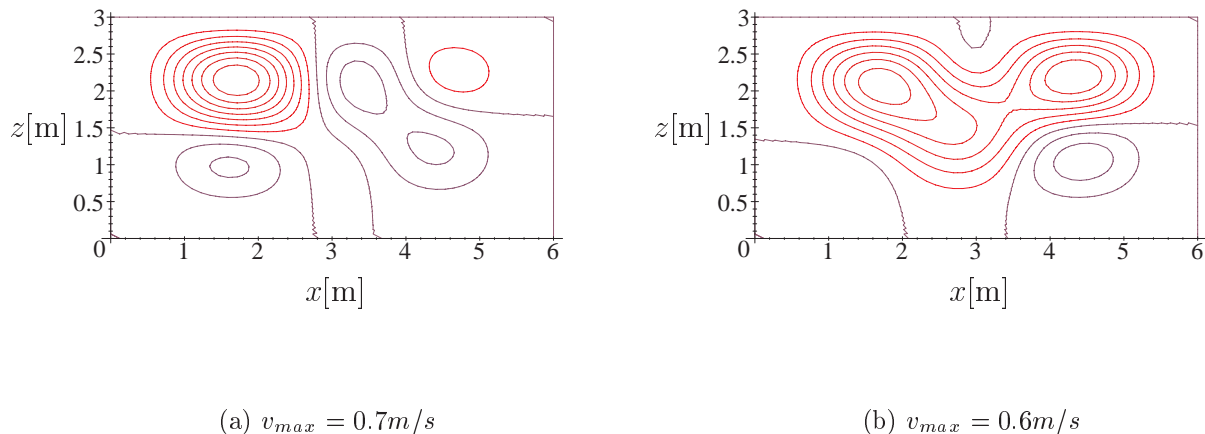


Figura 6.39: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 1140$ s, b) $t_0 + 1150$ s

e 0.6 m/s, evidenciando-se na Figura 6.39 a) uma célula com um gradiente de velocidades claramente superior aos das restantes quatro células. Na Figura 6.39 b) aparece uma grande célula que resulta da coalescência de três células da Figura 6.39 a). Todo este processo evidencia a existência de uma zona francamente oscilatória.

A Figura 6.40 a) traçada ao fim de cerca de uma hora do início do "zoom" apresen-

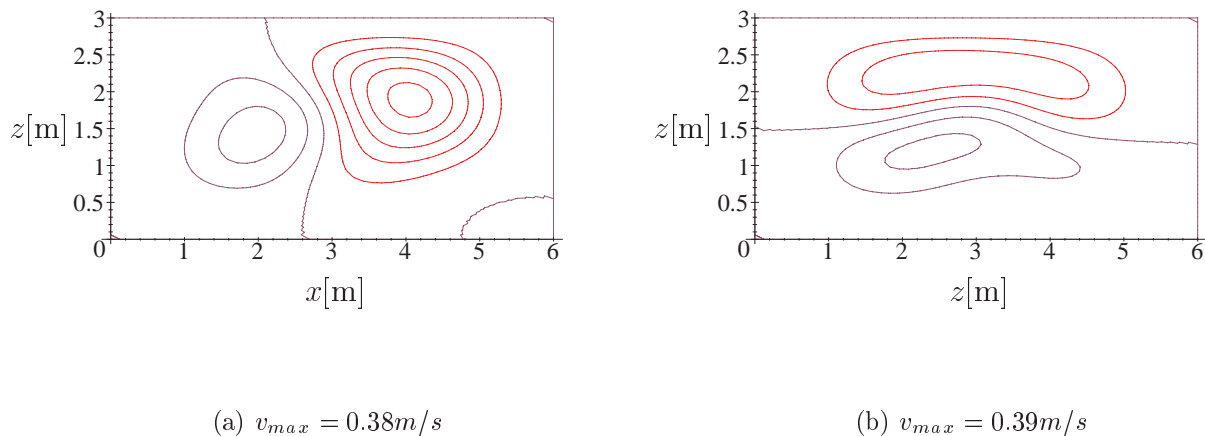


Figura 6.40: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3500$ s, b) $t_0 + 3530$ s

ta duas células verticais as quais tendem a misturar o fluido e na Figura 6.40 b) essa

mistura concretizou-se numa divisão em duas camadas, cada uma com uma célula. Esta configuração de células horizontais divide o domínio a 1.5 m de altura.

Fazendo uma análise do campo de temperaturas para $t_0 + 3530$ s, Figura 6.41, observa-

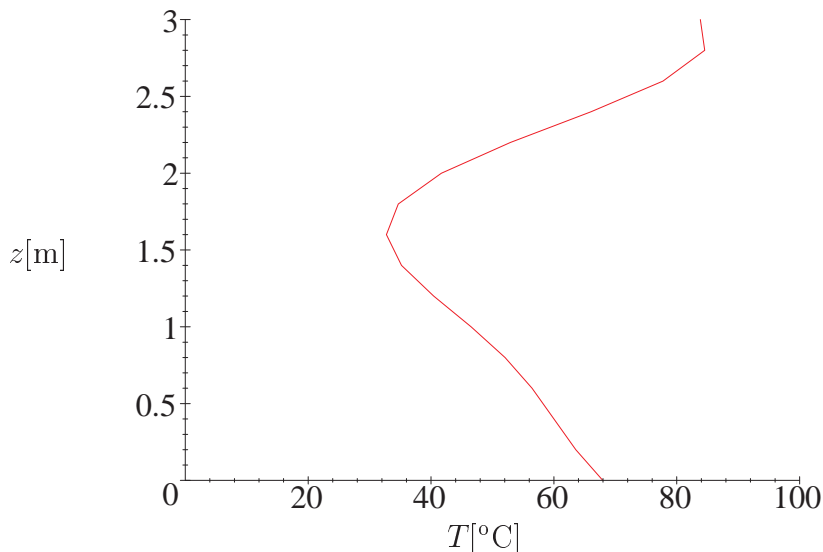
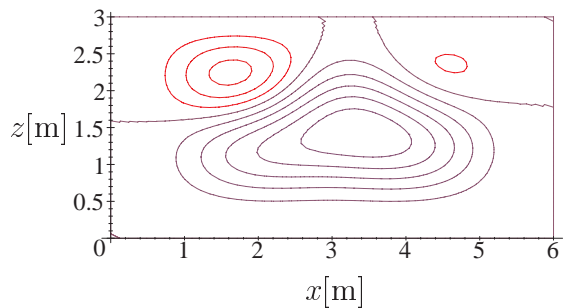
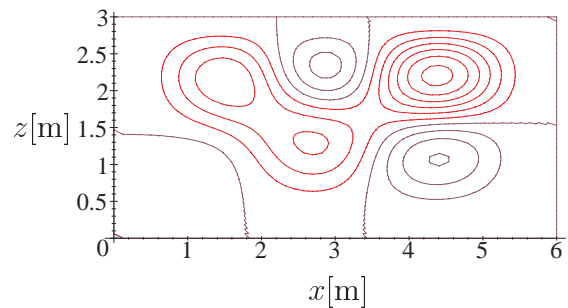
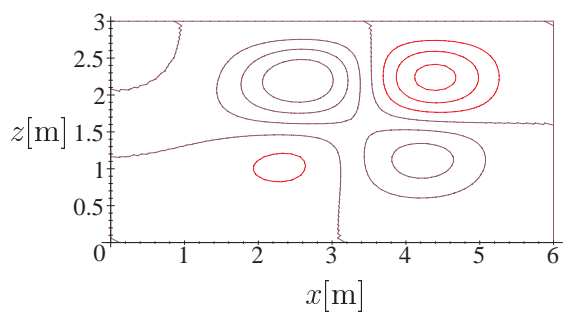
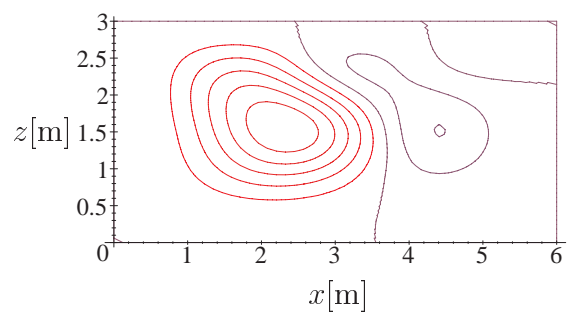


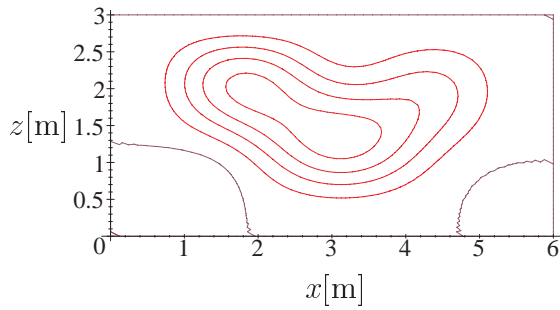
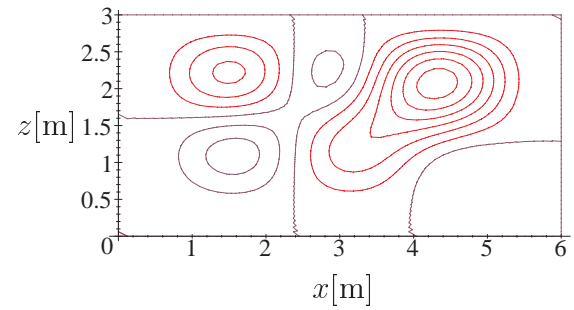
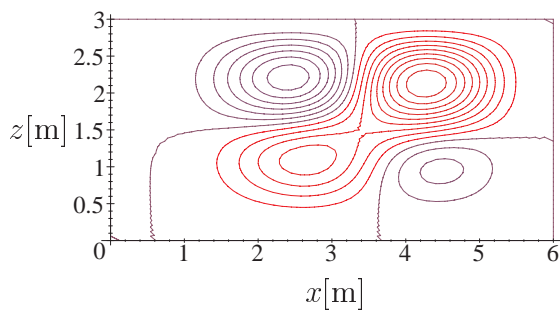
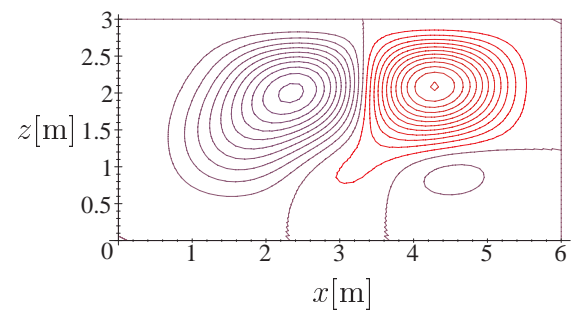
Figura 6.41: Perfil de Temperatura em $t_0 + 3530$ s

se que de 0 m a 1.5 m o perfil apresenta um declive negativo e que de 1.75, m a 2.8 m apresenta um declive positivo. A figura aponta, pois, para a existência das duas células horizontais visíveis na Figura 6.40 b), divididas a uma altura de 1.5 m. Esta situação não se mantém voltando o Lago a uma situação instável, como se pode ver nas Figuras 6.42 e 6.43 onde continua a verificar-se uma grande oscilação. O processo desenrola-se ao longo das quatro configurações começando por apresentar uma célula com um maior diferencial de velocidades, situada na zona inferior do domínio, a qual degenera em quatro células, retomando de novo a configuração com duas células verticais. Refira-se que a configuração apresentada Figura 6.43 b) é análoga à configuração da Figura 6.40 a), existindo em ambas simetria em relação a um eixo vertical em $x = 3$ m. No primeiro caso a célula dominante é a situada à direita dessa divisória enquanto que agora é a célula situada à esquerda da divisória. Ambas as configurações traduzem situações instáveis.

Na Figura 6.44 dá-se uma coalescência entre as duas células verticais, originando uma grande célula na zona superior, a qual rapidamente degenera em quatro células, duas delas com gradientes de velocidade claramente mais intensos.

A Figura 6.45, situação de instabilidade mais acentuada, começa por apresentar quatro células, na Figura 6.45 a) que degeneram em duas grandes células verticais na Figura 6.45 b), onde a velocidade máxima atingida é de 1 m/s. O valor desta velocidade continua a subir e ao fim de 50 s a Figura 6.46 retrata duas configurações onde as velocidades estão próximas dos 2 m/s. Este valor da velocidade é evidenciada pelos gradientes extremamente intensos. Note-se, porém, que esta situação só se mantém por escassos segundos. Nas Figuras 6.46 a) e b) permanecem duas grandes células. A configuração destas células é vertical e, após coalescência, uma das células passa a dominar a zona inferior do domínio.

(a) $v_{max} = 0.5m/s$ (b) $v_{max} = 0.65m/s$ Figura 6.42: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3610$ s, b) $t_0 + 3620$ s(a) $v_{max} = 0.39m/s$ (b) $v_{max} = 0.44m/s$ Figura 6.43: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3660$ s, b) $t_0 + 3670$ s

(a) $v_{max} = 0.3m/s$ (b) $v_{max} = 0.5m/s$ Figura 6.44: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3680$ s, b) $t_0 + 3690$ s(a) $v_{max} = 0.9m/s$ (b) $v_{max} = 1.0m/s$ Figura 6.45: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3710$ s, b) $t_0 + 3720$ s

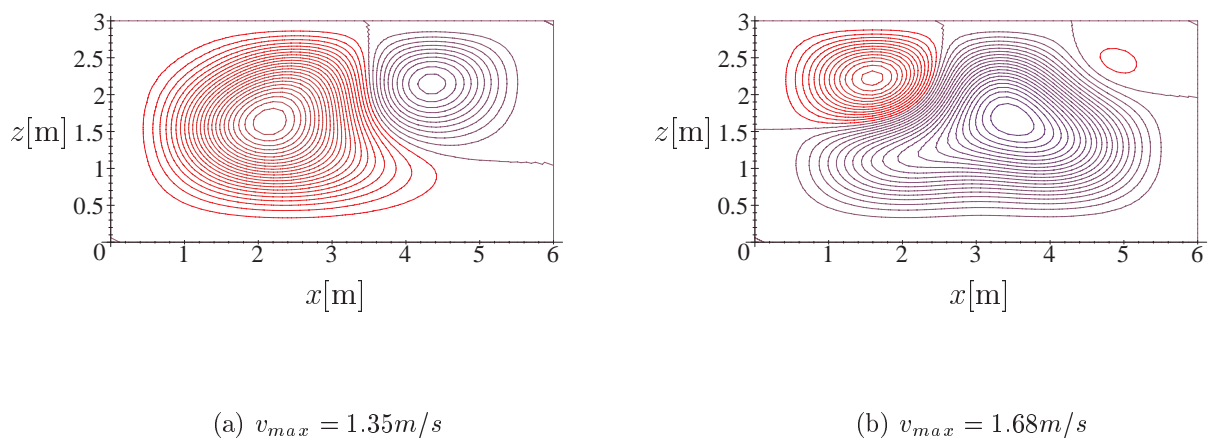


Figura 6.46: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3770$ s, b) $t_0 + 3800$ s

Na Figura 6.47 atinge-se a velocidade mais elevada, numa configuração de duas células

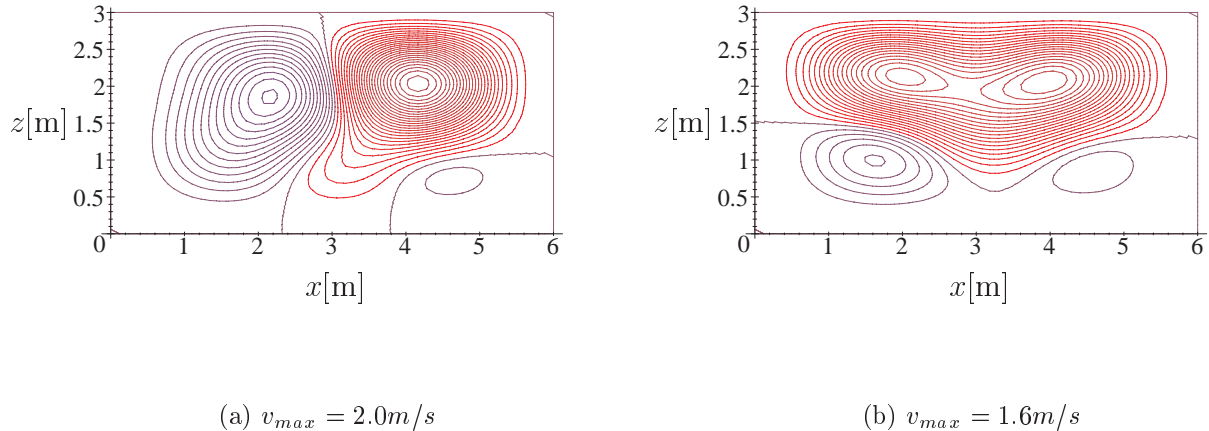
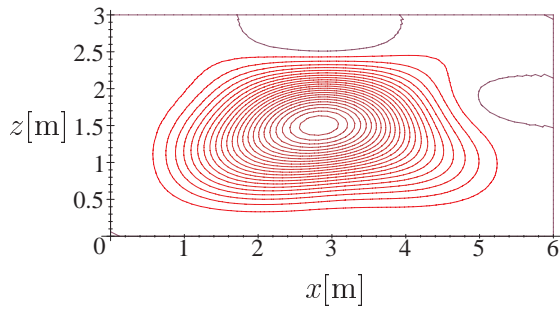
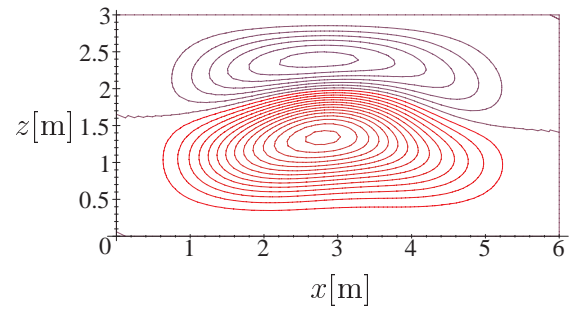
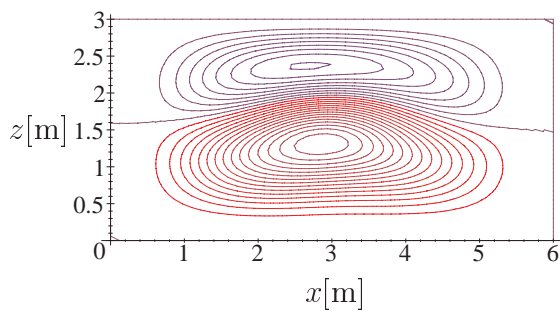
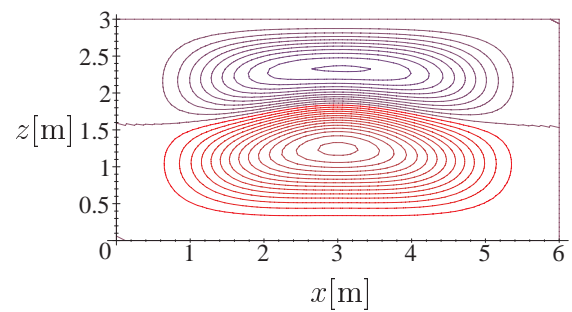


Figura 6.47: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3810$ s, b) $t_0 + 3820$ s

verticais, as quais se acabam por se unir, ao fim de 10 s numa única célula, situada desta vez na zona superior do domínio.

O valor da velocidade máxima começa a diminuir na Figura 6.48 para 1.5 m/s mas ainda se está na zona de transição. Na Figura 6.48 a) a célula maior abarca todo o domínio e acaba por degenerar em duas células horizontais.

Os gráficos da Figura 6.49 têm um incremento de $0.1 \times 10^{-1} \text{m}^2/\text{s}$ entre as isolinhas em consequência da descida do valor das velocidades máximas observadas, respectivamente 0.4 m/s e 0.35 m/s. Tanto a Figura 6.49 a) como a Figura 6.49 b) apresentam configu-

(a) $v_{max} = 1.7 m/s$ (b) $v_{max} = 1.5 m/s$ Figura 6.48: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 3840$ s, b) $t_0 + 4860$ s(a) $v_{max} = 0.4 m/s$ (b) $v_{max} = 0.35 m/s$ Figura 6.49: Linhas de corrente S_{in2} : a) $t_0 + 7800$ s, b) $t_0 + 9000$ s

rações análogas à da Figura 6.48 b), formadas por duas grandes células horizontais. Esta configuração permanecerá em regime convectivo.

É interessante constatar que o valor da velocidade máxima da Figura 6.49 b) é igual ao observado na Figura 6.40 b), onde por instantes as células exibiram uma configuração idêntica a esta última.

Da observação das linhas de corrente apresentados pode concluir-se que o Lago a dado momento ($t_0 + 3530$ s) esteve quase a ficar com uma velocidade constante de 0.39 m/s dividido em duas camadas apresentando duas células justapostas.

No entanto, esta configuração desfez-se e as instabilidades sobreposaram-se novamente até que, após cerca de duas horas, foi possível estabilizar em regime convectivo. No Lago inicialmente estável, durante o regime difusivo, deu-se uma transição de regime a qual exibiu movimentos oscilatórios. Duas horas após o início deste estado oscilatório o Lago volta a uma situação de estabilidade (com a uniformização dos campos de temperatura e de salinidade) passando a um regime convectivo.

A Figura 6.50 dá uma ideia da variação do valor das velocidades máximas obtidas,

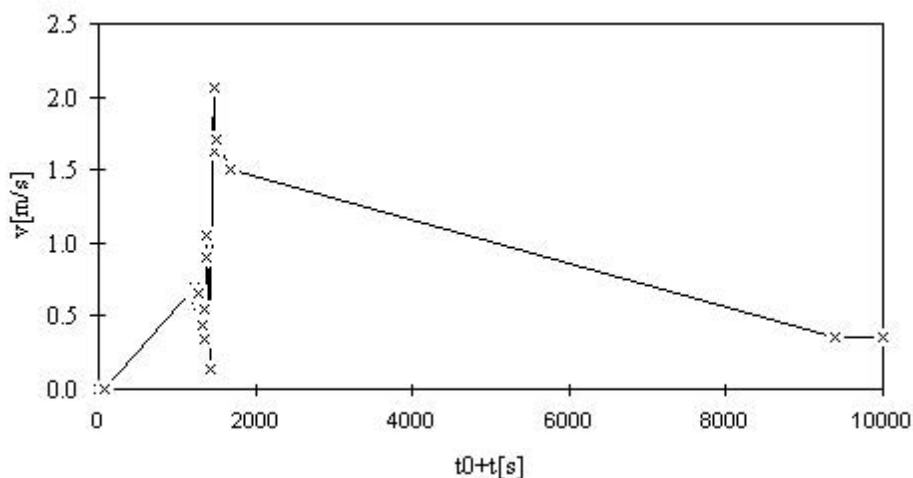


Figura 6.50: Velocidade máxima observada, S_{in2} ($\mu = 0.8$)

mostrando: um primeiro pico correspondendo a uma situação de grande instabilidade, diminuído depois a velocidade para 0.35 m/s; uma segunda instabilidade mais pronunciada conduz a velocidades que atingem os 2 m/s decaindo até atingir de novo os 0.35 m/s com que permanecerá em regime de convecção estacionária.

Uma vez estabelecido o regime convectivo estacionário, dia 334, a Figura 6.51 apresenta os campos de temperatura e de salinidade evidenciando-se a verticalidade total para o campo da salinidade e a quase verticalidade para o campo da temperatura. A Figura 6.52 mostra as linhas de corrente para o dia 334 sendo a velocidade constante com o valor de 0.35 m/s.

A Figura 6.53 mostra a evolução anual da velocidade no ponto $(x, z) = (3 \text{ m}, 2 \text{ m})$. Após o período de condução pura onde a velocidade é nula esta aumenta rapidamente no instante em que se iniciam as instabilidades, vindo a estabilizar, em regime convectivo estacionário, em cerca de 0.15 m/s.

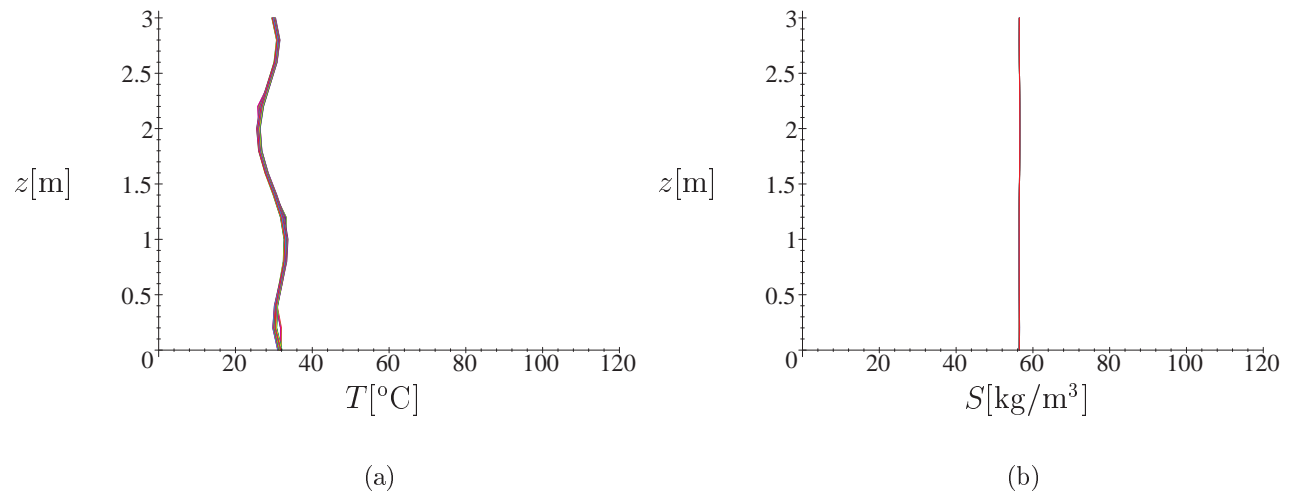


Figura 6.51: Perfis de Temperatura e de Salinidade em regime convectivo (S_{in2}), dia 334

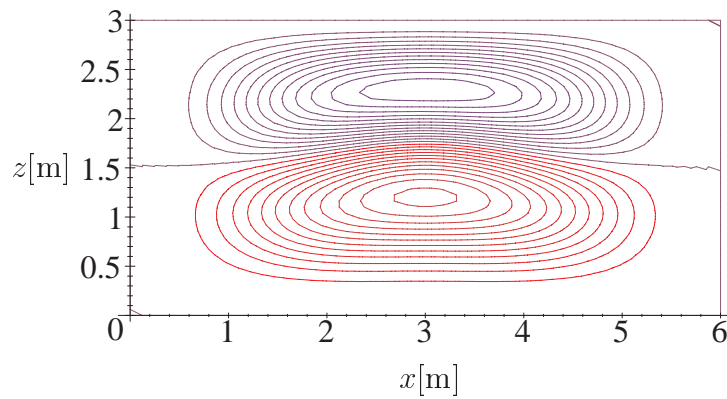


Figura 6.52: Linhas de corrente em regime convectivo S_{in2} , dia 334

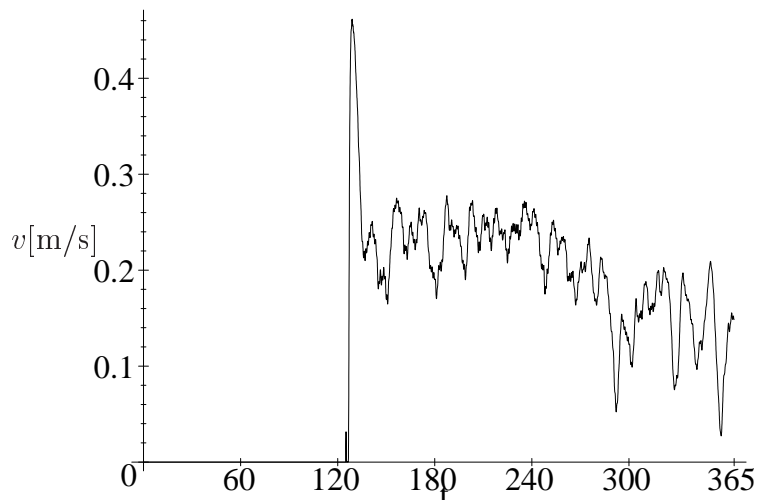


Figura 6.53: Velocidade em $(x, z) = (3 \text{ m}, 2 \text{ m})$, S_{in2}

6.5.3 Resultados obtidos para o perfil inicial de salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$)

Até ao momento, o valor do coeficiente de extinção da absorção de radiação no Lago empregue na análise do modelo do Lago tem sido $\mu = 0.8$. A escolha deste valor reside no facto de o mesmo traduzir uma situação mais próxima da situação real. Para ter uma ideia da resposta do modelo a uma situação de maior transparência do Lago apresentam-se de seguida os resultados obtidos para a evolução dos campos de temperatura e de salinidade e as linhas de corrente, admitindo um coeficiente de extinção $\mu = 0.2$.

A análise que se segue decorre nos mesmos moldes da efectuada na subsecção anterior, desenvolvendo-se ao longo de três intervalos de tempo, abrangendo o primeiro 34 minutos, com início aos oito minutos do dia 116, $t_0 + 8 \text{ mn}$ o segundo com uma duração de 17 minutos a partir de $t_0 + 50 \text{ mn}$ e o terceiro 26 minutos, com início em $t_0 + 150 \text{ mn}$. Refira-se que nesta situação a convecção também ocorre no dia 116.

Zoom do campo das temperaturas

A Figura 6.54 mostra a evolução do campo da temperatura durante 34 minutos. O campo de temperaturas apresenta um declive positivo acentuado na zona superior do domínio e negativo na zona inferior com excepção dos 50 cm mais próximos da fronteira inferior onde o declive volta a ser positivo. O diferencial de temperatura mais elevado na zona superior do domínio aponta para uma situação próxima do início da instabilidade. Nesta figura os perfis estão coincidentes para tempos diferentes: a situação é ainda de estabilidade.

Já a Figura 6.55 evidencia uma grande oscilação por parte do perfil de temperaturas embora com uma amplitude inferior, em cerca de 20°C à verificada na situação de pior transparência para o Lago. O perfil de temperaturas sofre uma alteração brusca dando-se oscilações de grande amplitude. Nesta figura além da oscilação focada, que corresponde

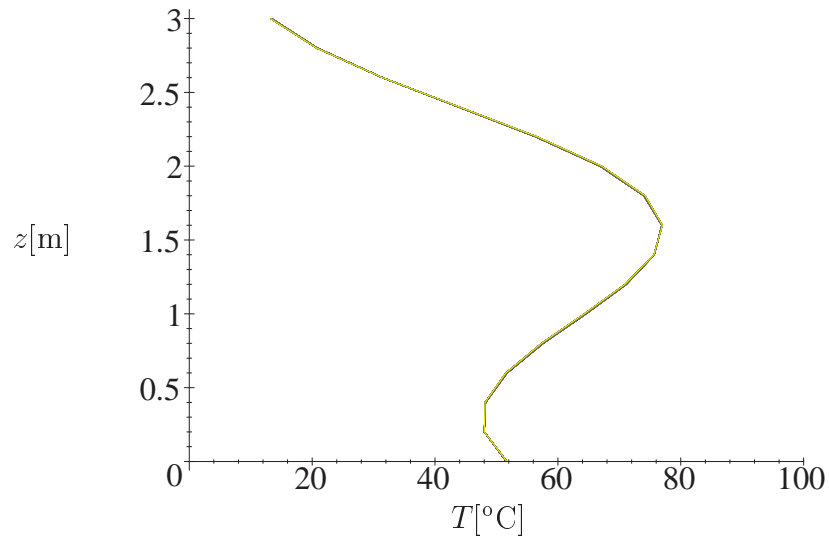


Figura 6.54: Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 8$ mn)

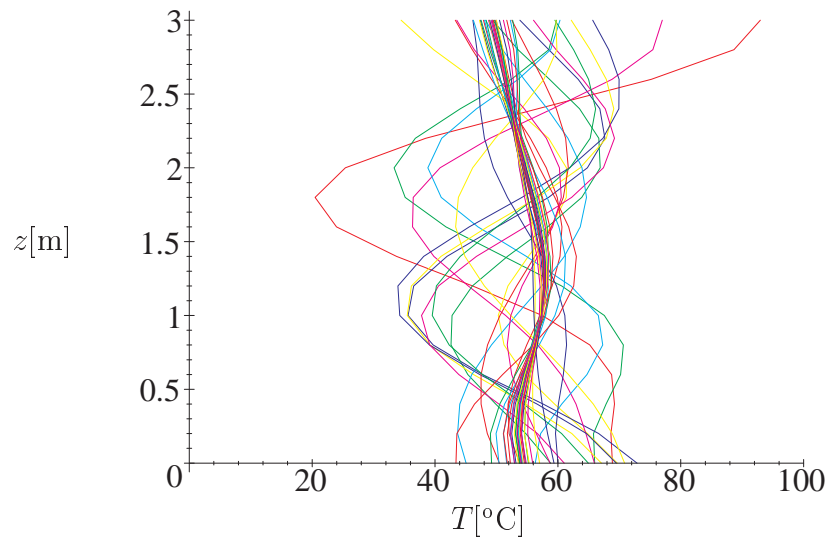


Figura 6.55: Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 50$ mn)

à zona de transição mais instável, podem-se ver as configurações que ocorrem antes das grandes instabilidades começando por um perfil análogo ao da Figura 6.54. Dá-se, de seguida, uma inversão no perfil até à ocorrência de oscilações de grande amplitude. Após este período o campo da temperatura uniformiza-se em torno do valor 57.5°C . Na Figura 6.56 o perfil apresenta-se praticamente vertical situando-se o valor médio da temperatura

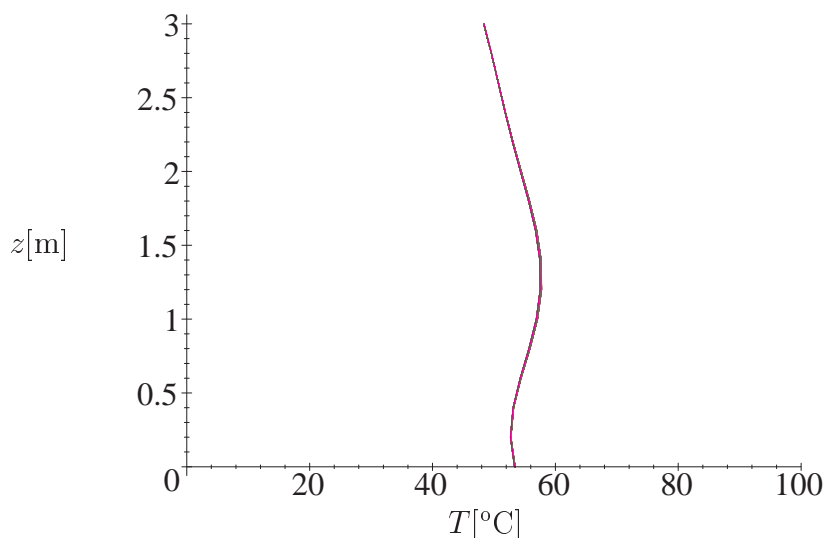


Figura 6.56: Perfis de Temperatura S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 26 minutos (após $t_0 + 150$ mn)

nos 57.5°C .

Refira-se que nesta figura a uniformização do campo da temperatura é mais intensa do que a uniformização observada na Figura 6.33 relativa à situação de pior transparência. Pode pois dizer-se que, numa situação de maior transparência a uniformização observada no campo da temperatura é mais rápida e dá-se de uma forma mais intensa, o que está de acordo com o facto de, nesta situação, o Lago atingir temperaturas mais altas.

Zoom do campo da salinidade

A evolução do campo da salinidade desenvolve-se de forma análoga à verificada para a temperatura. Assim, na Figura 6.57 o perfil de salinidade apresenta um declive negativo em quase todo o domínio, sendo mais intenso na zona superior do mesmo. Com o desenvolvimento do movimento oscilatório o diferencial da zona superior passa a ser mais acentuado na zona inferior mas a amplitude da oscilação do perfil vai diminuindo, como se pode ver na Figura 6.58. Na Figura 6.59 o perfil é quase vertical em torno de uma concentração de 55 kg/m^3 , mas não tão vertical como na situação de pior transparência.

Zoom do campo das velocidades

As linhas de corrente para este caso estão distribuídas a partir dos onze minutos do dia 116 e ao longo de um intervalo de tempo de dez minutos, como pode ser observado na Figura

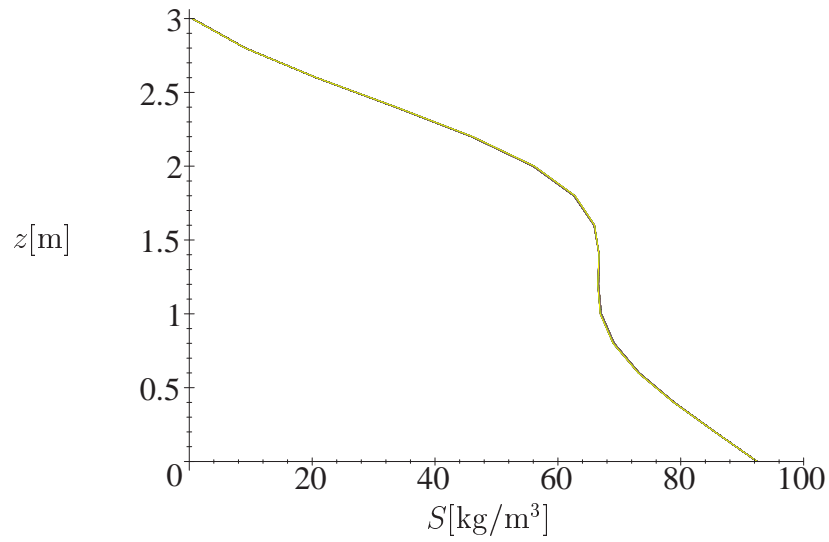


Figura 6.57: Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 34 minutos (após $t_0 + 8$ mn)

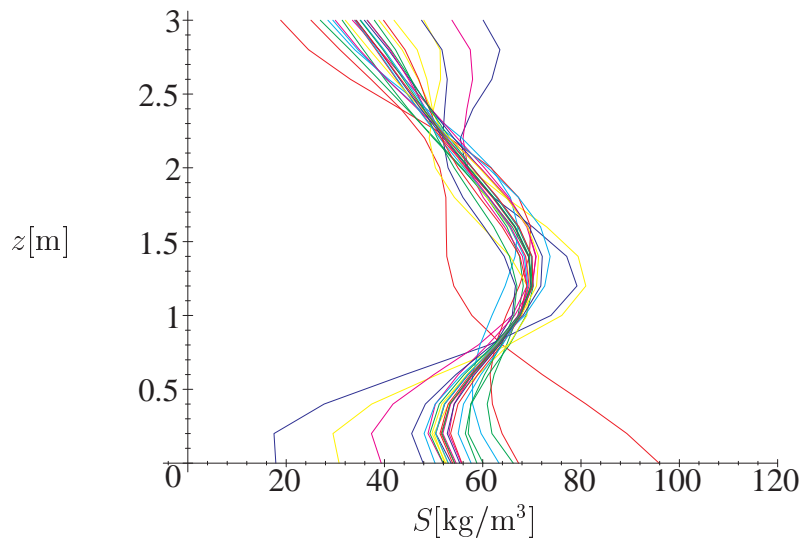


Figura 6.58: Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 17 minutos (após $t_0 + 50$ mn)

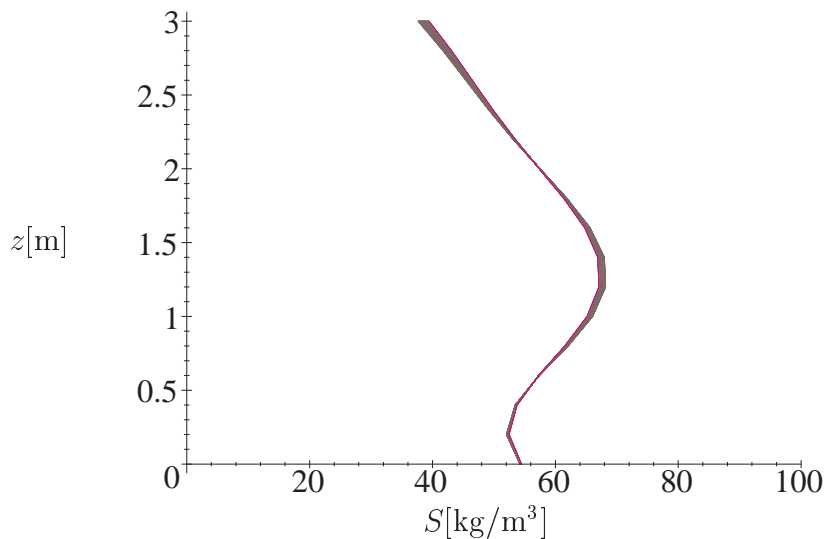


Figura 6.59: Perfis de Salinidade S_{in2} ($\mu = 0.2$) observados durante 26 minutos (após $t_0 + 150$ mn)

6.60. Paralelamente à situação da subsecção anterior também aqui se torna necessário visualizar os gráficos das linhas de corrente em escalas de velocidade diferentes. Neste caso basta, contudo, considerar duas escalas.

A Figura 6.61 a) onde as linhas de corrente são traçadas com um incremento de $0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, mostra quatro células bem diferenciadas e a Figura 6.61 b) mostra duas células verticais, desestabilizadoras. As velocidades observadas em ambas as configurações são extremamente baixas, da ordem do $0.1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ indicando que se está ainda no início da transição de regime difusivo para convectivo. Estas configurações são praticamente iguais às observadas com $\mu = 0.8$.

As configurações das Figuras 6.62 a) b) a 6.65 a) b) apresentam as linhas de corrente com uma segunda escala, sendo o incremento de $0.125 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$, variando a velocidade

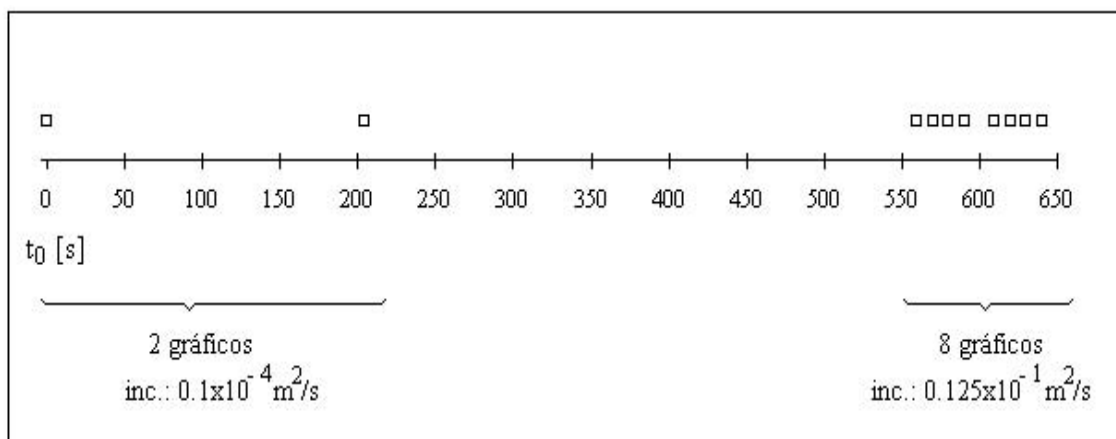


Figura 6.60: Diagrama dos gráficos (ψ) de S_{in2} , $\mu = 0.2$ ($t_0 = 11$ mn do dia 116)

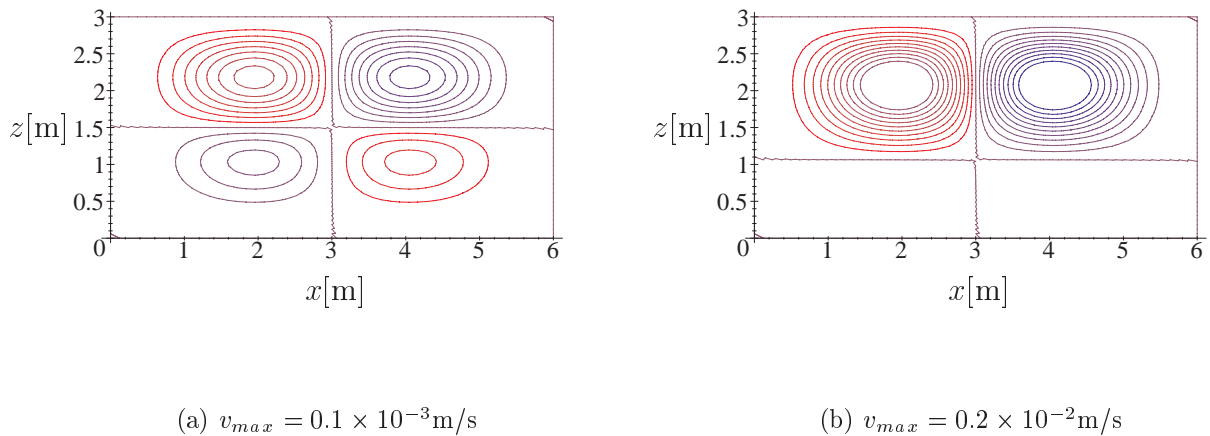


Figura 6.61: Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) dia 116, b) $t_0 + 20$ s

de 0 m/s a 1 m/s. Na Figura 6.62 a) e b) as configurações coincidem com as configurações

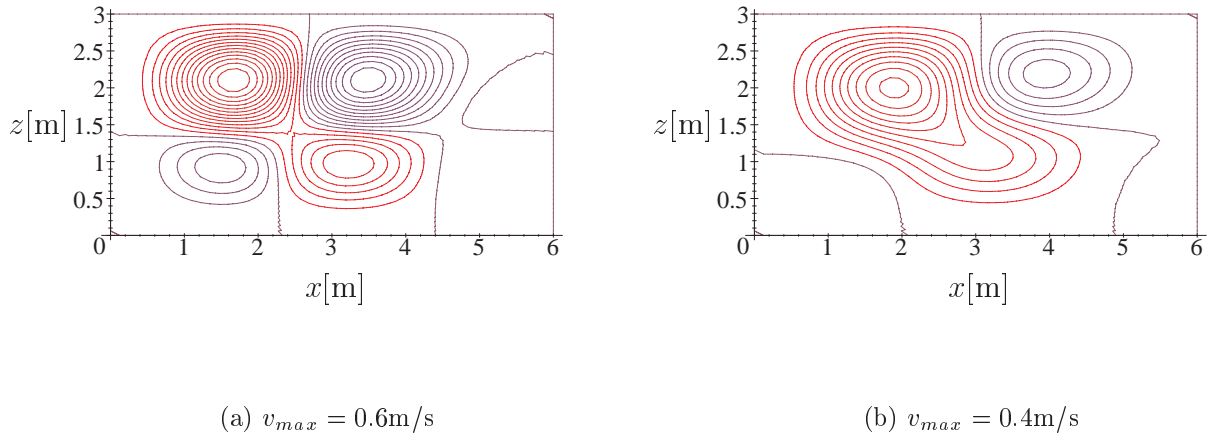
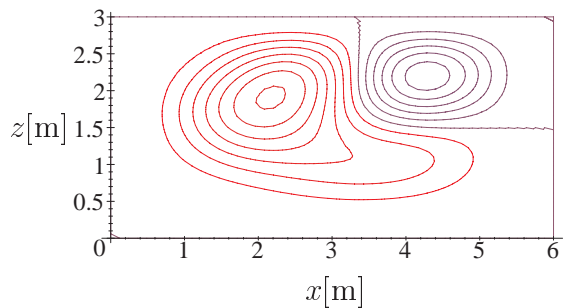
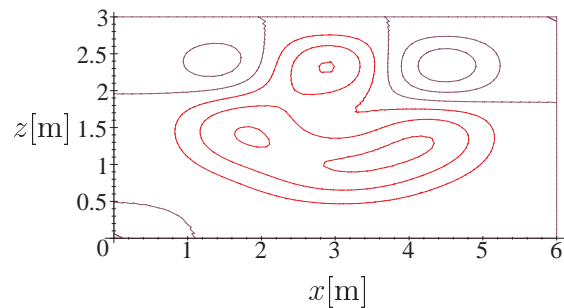
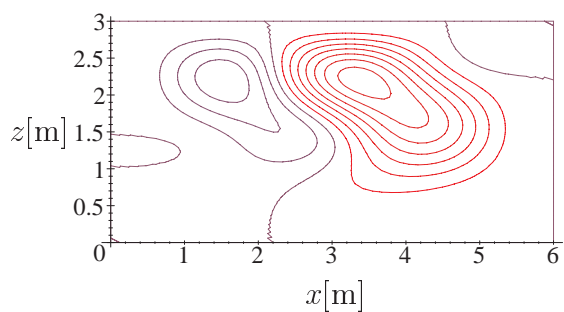
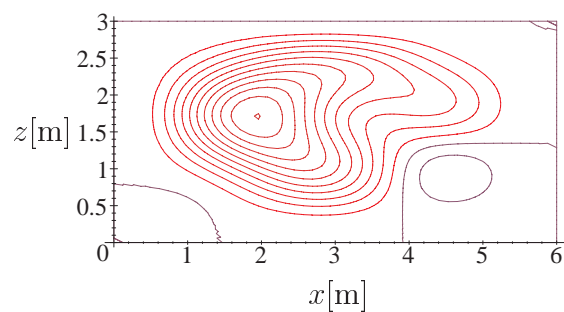


Figura 6.62: Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 550$ s, b) $t_0 + 570$ s

obtidas para a situação de $\mu = 0.8$. O mesmo se passa para as configurações apresentadas nas Figuras 6.63 , 6.64 e 6.65 .

Verifica-se no início uma configuração de quatro células a qual dá origem a duas células verticais. Estas duas células tornam a aparecer em posições alternadas seguidas de uma coalescência, até que a situação estabiliza na Figura 6.65 a) aparecendo seis células distribuídas ao longo de duas camadas, divididas por uma interface a cerca de 1.5 m de altura. A configuração da Figura 6.65 b) permanece em regime convectivo estacionário.

A Figura 6.66 mostra a velocidade máxima atingida em cada um dos gráficos, nas

(a) $v_{max} = 0.3\text{m/s}$ (b) $v_{max} = 0.2\text{m/s}$ Figura 6.63: Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 580$ s, b) $t_0 + 590$ s(a) $v_{max} = 0.4\text{m/s}$ (b) $v_{max} = 0.3\text{m/s}$ Figura 6.64: Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 610$ s, b) $t_0 + 620$ s

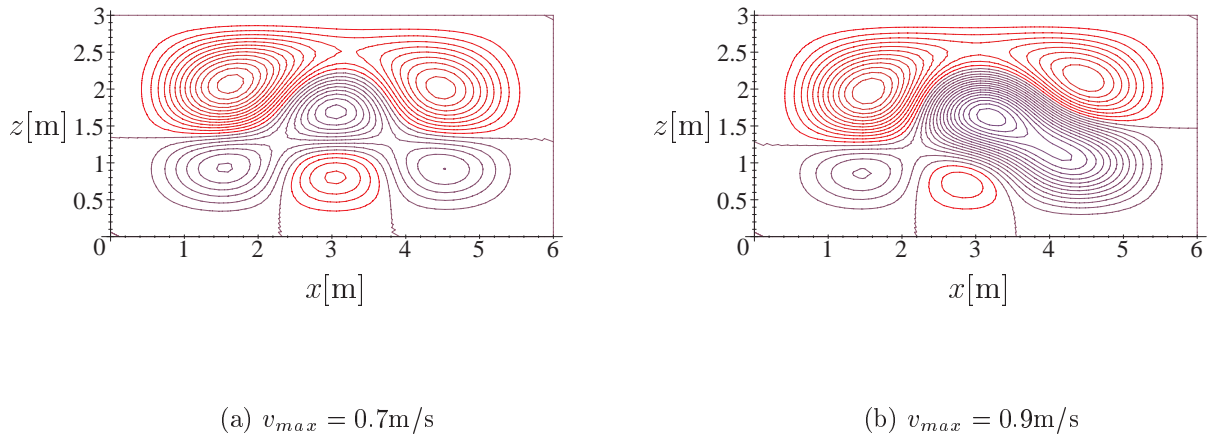


Figura 6.65: Linhas de corrente S_{in2} , $\mu = 0.2$: a) $t_0 + 630$ s, b) $t_0 + 640$ s

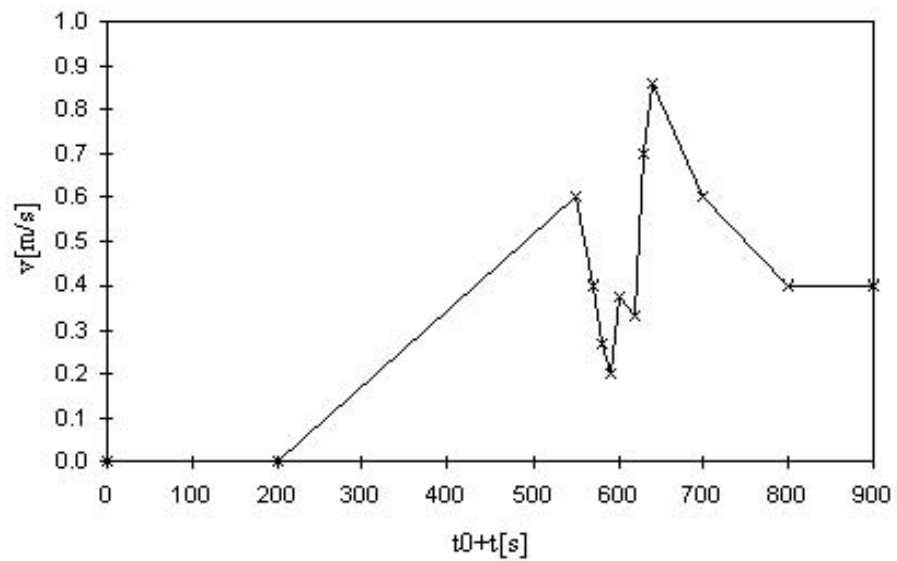


Figura 6.66: Velocidade máxima observada S_{in2} ($\mu = 0.2$)

Figuras 6.61 a 6.65.

A velocidade que se estabelece em regime convectivo é $v = 0.4 \text{ m/s}$, logo é superior à atingida para $\mu = 0.8$. O início de convecção ocorre no dia 116 e processa-se de uma forma idêntica à observada na situação de Lago menos transparente.

6.6 Variação da geometria considerando o perfil inicial de salinidade S_{in2}

Até ao momento o domínio Ω tem assumido uma configuração onde o comprimento é o dobro da altura.

Referem-se de seguida os resultados obtidos para outras geometrias. Este tipo de análise tem interesse uma vez que o efeito da dimensão horizontal está relacionado com o retardar do início do movimento convectivo. Se a dimensão horizontal for menor que a vertical é natural que a convecção se inicie mais tarde uma vez que o Lago demora mais tempo a aquecer. Nestas circunstâncias o gradiente de temperatura que se estabelece demora mais tempo a contrariar o gradiente salino.

Os domínios que se passam a analisar são os seguintes:

1. $\Omega_1 = [0 \text{ m}, 1.5 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$;
2. $\Omega_2 = [0 \text{ m}, 3 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$;
3. $\Omega_3 = [0 \text{ m}, 30 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$.

Este último domínio é considerado dada a sua semelhança ao domínio de um Lago Solar, como por exemplo o de Pégões.

6.6.1 Resultados obtidos para o domínio Ω_1

Esta secção apresenta a evolução das linhas de corrente obtidas quando se consideram no modelo funções de aproximação das variáveis T , S e ψ com oito modos, um campo inicial de salinidade dado por S_{in2} , um coeficiente de extinção da radiação solar $\mu = 0.8$ e o domínio Ω_1 .

Nestas condições o início de convecção dá-se no dia 173, logo muito depois dos casos analisados nas subsecções anteriores. Este atraso no início de convecção deve-se ao facto de, como as paredes estão próximas, não se desenvolverem velocidades tão elevadas como nos casos anteriores. O número de Rayleigh térmico também é nesta situação mais baixo do que o atingido quando o comprimento em x é superior, o que conduz a um gradiente de temperaturas menos forte.

Os resultados que se passam a apresentar abrangem um intervalo de cerca de 1800 s, a partir de $t_0 = 24 \text{ mn}$ do dia 173.

Como nos casos anteriores ocorre uma grande oscilação neste intervalo de tempo observando-se uma grande variação na configuração das respectivas linhas de corrente, o que implicou fazer uma distinção das mesmas em três escalas de velocidades, de acordo com a Figura 6.67.

A Figura 6.68 mostra uma configuração com quatro células bem delimitadas e considera um incremento de $0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ entre isolinhas. Esta configuração é idêntica às

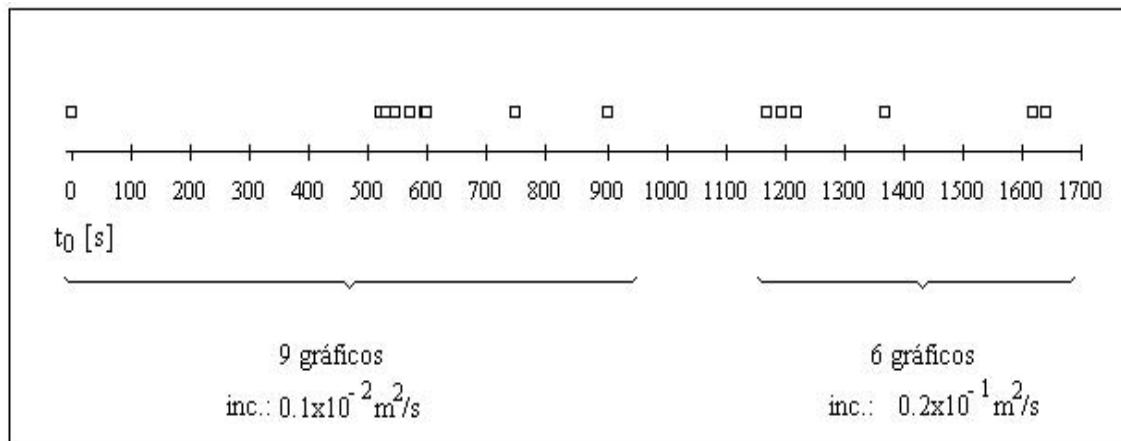


Figura 6.67: Diagrama dos gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_1 ($t_0 = 24$ mn do dia 173)

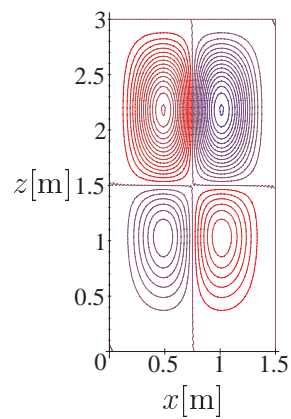


Figura 6.68: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 , $v_{max} = 0.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ($t_0 = \text{dia } 173$)

configurações com que se iniciam as análises das secções anteriores, diferindo apenas na altura da interface que divide a camada inferior da camada superior.

O conjunto das isolinhas das Figuras 6.69 a 6.72 é traçado com um incremento de $0.2 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$. A Figura 6.69 a) mostra uma configuração com duas células horizontais

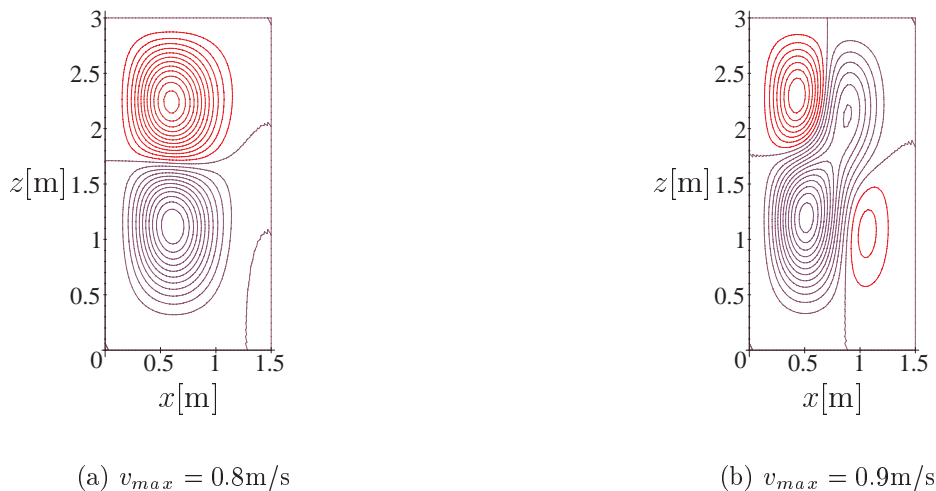


Figura 6.69: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 520 \text{ s}$, b) $t_0 + 530 \text{ s}$

com gradientes de velocidade intensos. Esta configuração não se aguenta e dá-se uma degenerescência apresentando a configuração da Figura 6.69 b) quatro células, duas delas ainda com velocidades elevadas.

As Figuras 6.70 e 6.71 mostram nas quatro configurações duas células horizontais que

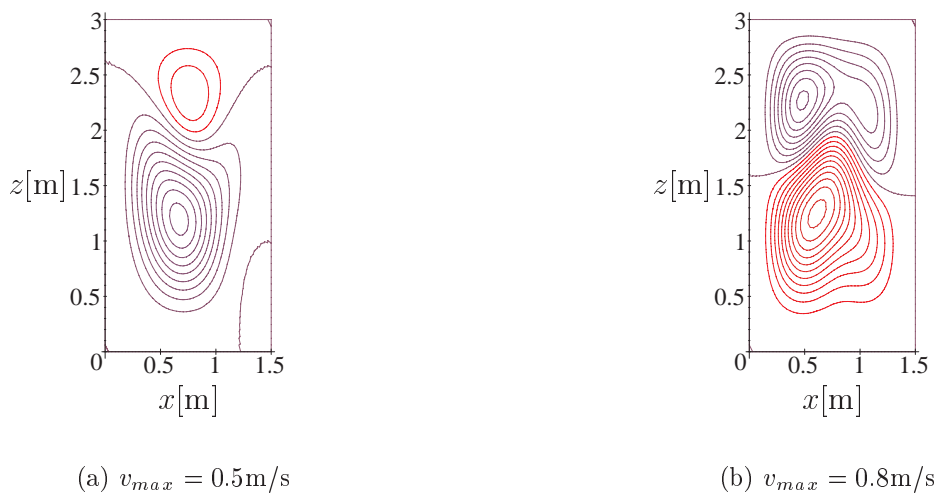


Figura 6.70: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 545 \text{ s}$, b) $t_0 + 570 \text{ s}$

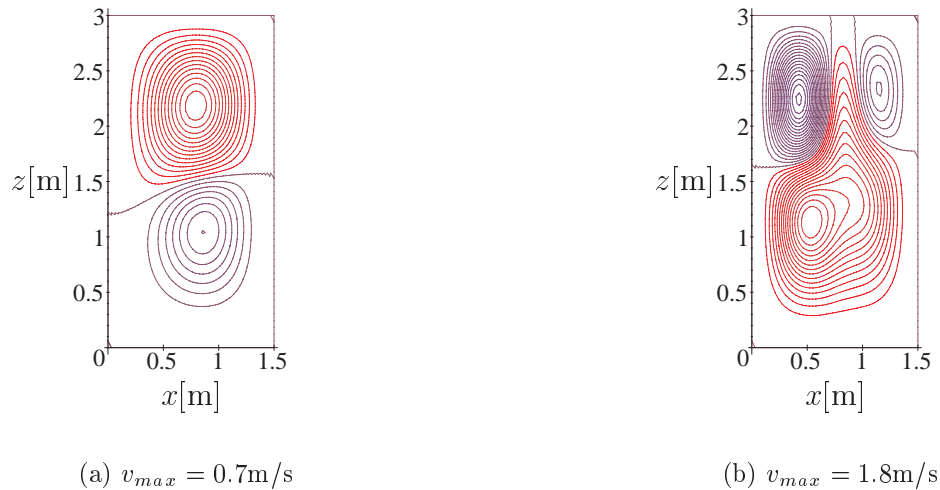


Figura 6.71: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 595\text{ s}$, b) $t_0 + 600\text{ s}$

alternam com respeito ao sentido em que rodam e à velocidade que atingem. A interface que divide as duas camadas onde se situam as células também varia começando a 2.7 m de altura e diminuindo até cerca de 1.2 m de altura.

Na Figura 6.71 b) é atingido o valor máximo da velocidade, 1.8 m/s, na célula situada no primeiro quadrante do domínio, referindo o ponto de máxima instabilidade. Na Figura 6.72 a) as duas células degeneram em quatro.

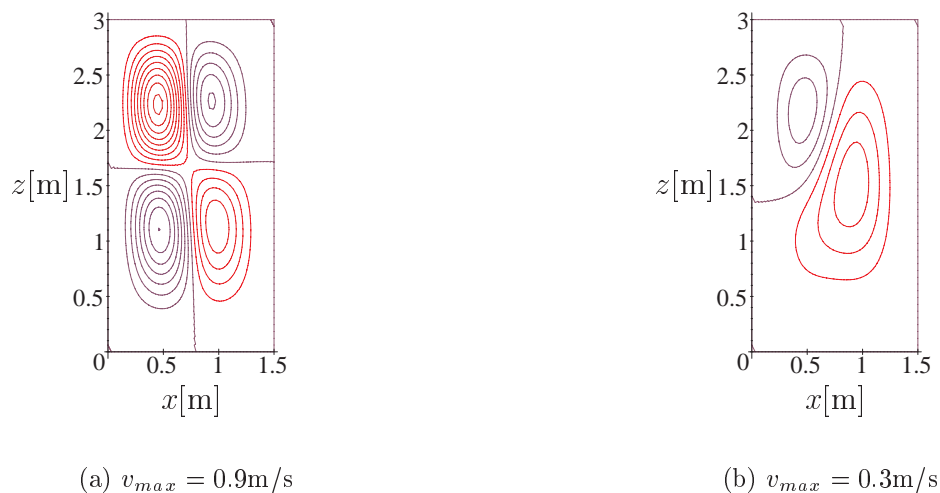


Figura 6.72: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 750\text{ s}$, b) $t_0 + 900\text{ s}$

O conjunto final de Figuras 6.73 a 6.75 é obtido considerando um incremento de $0.1 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ entre as linhas de corrente, com o objectivo de se captarem as velocidades mais baixas e o desenvolvimento das células até se estabelecer a uniformização completa

do Lago.

Ao longo das Figuras 6.73, 6.73, e 6.74 desenvolvem-se configurações com quatro e

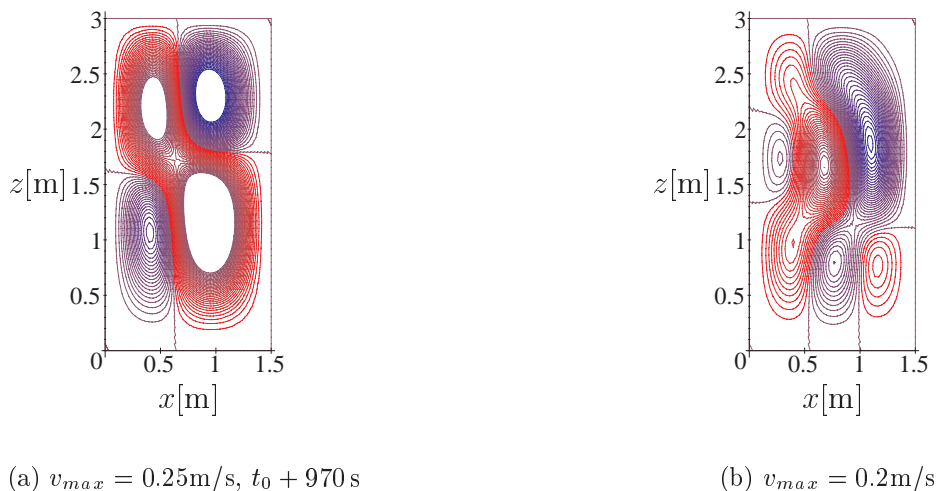


Figura 6.73: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 970\text{ s}$, b) $t_0 + 995\text{ s}$

seis células alternadamente, estando a velocidade a baixar com o tempo. Estas células são muito estreitas e altas (plumas). A Figura 6.75 b) mostra duas células horizontais com uma velocidade máxima de 0.1 m/s , configuração que se manterá ao longo do regime convectivo. Refira-se que esta configuração é idêntica à da Figura 6.69 a).

O facto desta configuração onde a camada está dividida a cerca de 1.6 m de altura, aparecer logo no início do movimento e não desaparecer de imediato (como nos casos das subsecções anteriores) revela a forma como o diferencial inicial de salinidade é "robusto" e

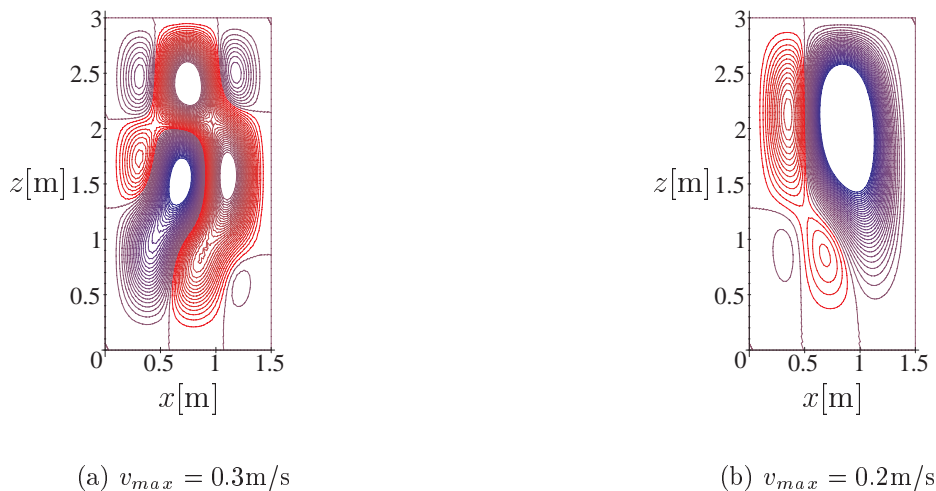


Figura 6.74: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 1020\text{ s}$, b) $t_0 + 1120\text{ s}$

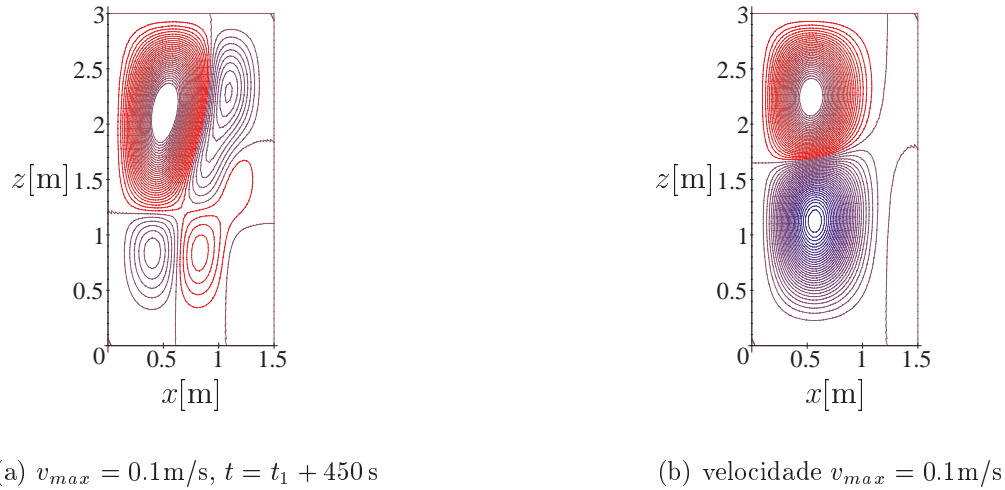


Figura 6.75: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_1 : a) $t_0 + 1420\text{s}$, b) $t_0 + 1450\text{s}$

consegue impedir o início das instabilidades, durante um período de tempo superior aos casos anteriores. Esta robustez também é consequência de um número de Rayleigh térmico baixo (uma vez que a dimensão horizontal é pequena). A situação verificada no domínio Ω_1 é análoga à de impedimento de convecção através dos mecanismos denominados "favo de abelha". Na realidade quando se diminui a superfície de incidência da radiação a camada demora mais tempo a aquecer e conseqüentemente a desestabilizar.

A Figura 6.76 mostra as velocidades máximas obtidas para Ω_1 ao longo do intervalo

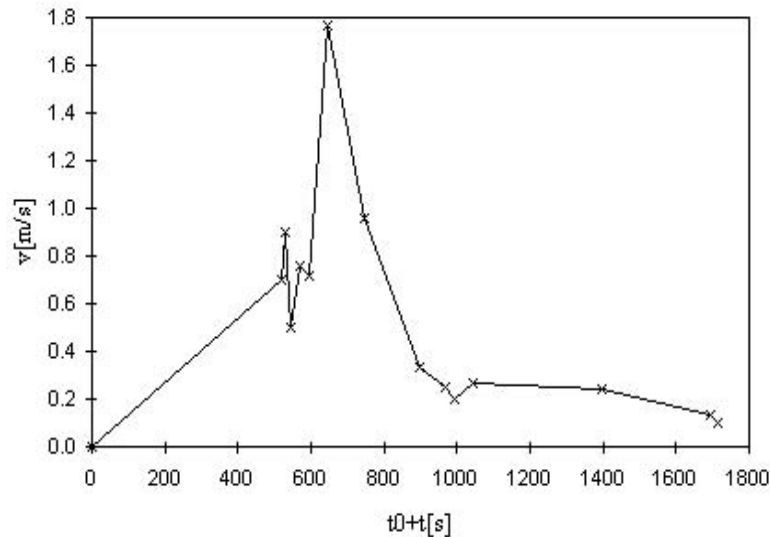


Figura 6.76: Velocidade máxima observada S_{in2} , Ω_1

de tempo considerado. De acordo com a sua observação pode concluir-se que existe uma tentativa de uniformização do Lago, logo no início mas que foi destruída, sobrepondo-

se uma instabilidade que conduz a uma velocidade máxima de 1.8 m/s. Esta diminui rapidamente uniformizando-se o Lago com uma velocidade de 0.1 m/s.

6.6.2 Resultados obtidos para o domínio Ω_2

A presente secção mostra a evolução das linhas de corrente considerando o domínio Ω_2 , ao longo de 79 minutos, ao fim de $t_0 = 10$ m do dia 127. Também nesta secção se consideram duas escalas para a análise da velocidade, de acordo com a Figura 6.77.

Assim, na Figura 6.78 que mostra uma configuração com quatro células, o incremento utilizado é de $0.1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ entre cada isolinha. Nesta figura, as células com um gradiente mais intenso estão situadas na zona superior do domínio. Refira-se que as células situadas na zona superior têm um diâmetro superior às situadas na zona inferior do domínio (a interface situa-se a 1.1 m de altura). Esta figura é uma vez mais, igual à primeira configuração de linhas de corrente apresentada para as situações anteriores.

A partir da Figura 6.79 o incremento entre isolinhas passa a ser $0.1 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$. Na Figura 6.79 a) começam por existir várias células que coalescem passados alguns segundos, numa única célula, Figura 6.79 b). A Figura 6.80 a) apresenta a velocidade mais elevada (1 m/s) numa configuração com quatro células. Esta velocidade é bem perceptível através do gradiente de velocidades, extremamente intenso, da célula situada no quarto quadrante do domínio. As outras três células estão bem delimitadas. Na Figura 6.80 b) a velocidade baixa para metade.

Na Figura 6.81 as três células passam a ter gradientes de velocidade diferentes acabando por dominaer a célula situada na parte inferior do domínio.

A Figura 6.82 a) mostra uma tentativa de degenerescência por parte da célula dominante, a qual não prossegue como se constata na Figura 6.82 b) onde a célula se recompõe novamente, passando a ocupar todo o domínio. Esta configuração perdurará ao longo do regime convectivo.

Da observação das figuras desta secção pode constatar-se que num domínio com as características de Ω_2 não se faz sentir uma divisão em duas células como nos casos anteriores. Sendo a geometria quadrada o efeito da largura não se faz sentir de uma forma tão pronunciada como na geometria rectangular.

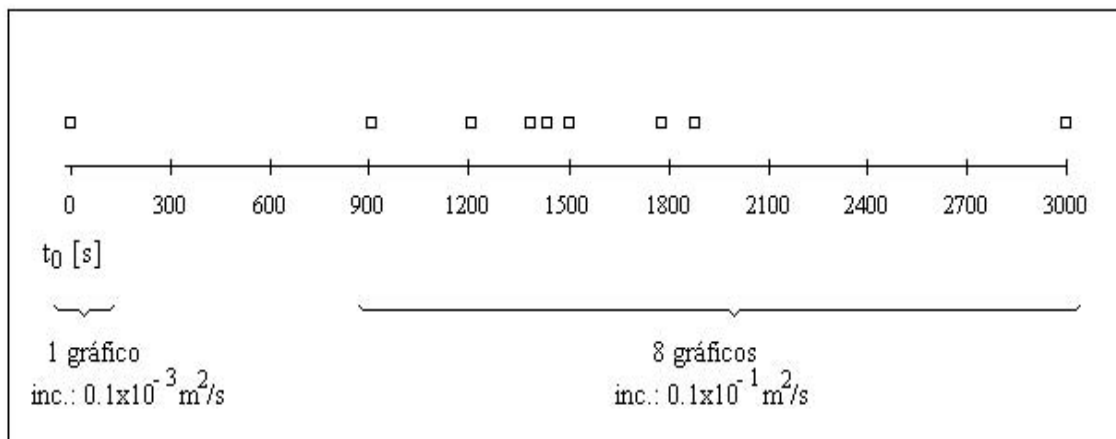


Figura 6.77: Diagrama de gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_2 ($t_0 = 10$ mn do dia 127)

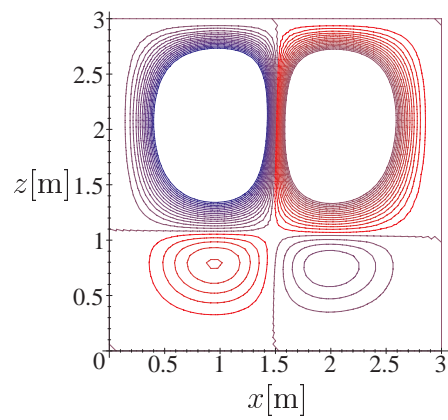


Figura 6.78: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 , $v_{max} = 0.19 \times 10^{-1}$ m/s, $t_0 = 10$ mn do dia 127

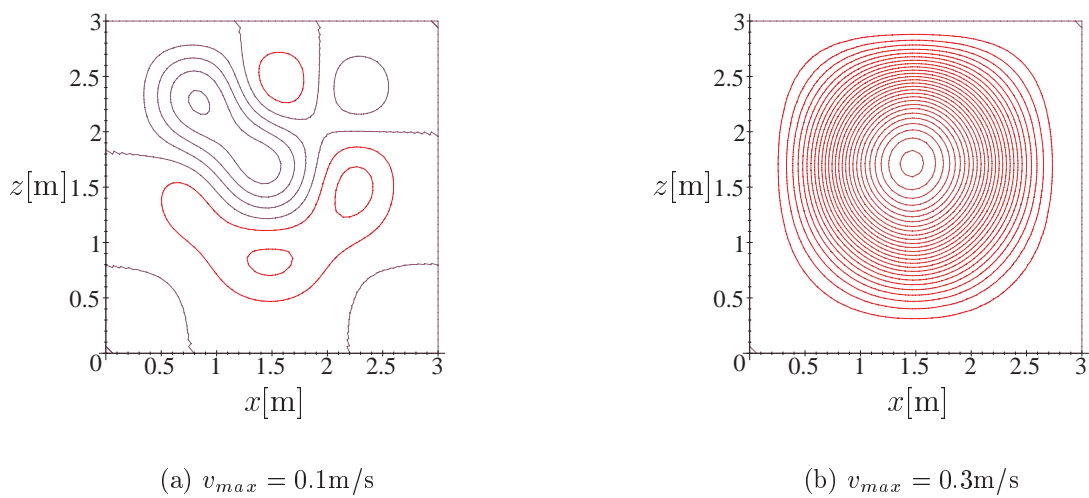


Figura 6.79: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 910$ s, b) $t_0 + 1210$ s

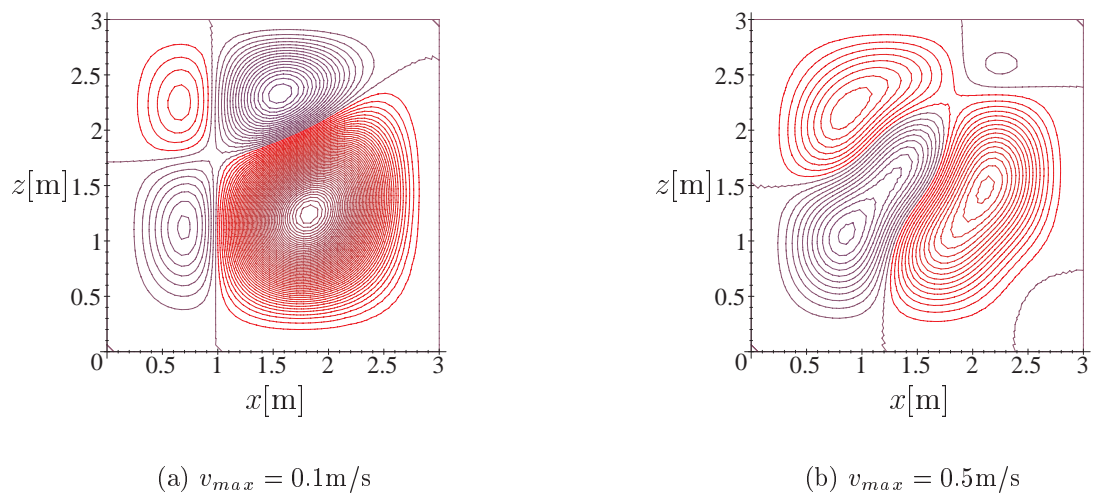


Figura 6.80: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1390\text{ s}$, b) $t_0 + 1440\text{ s}$

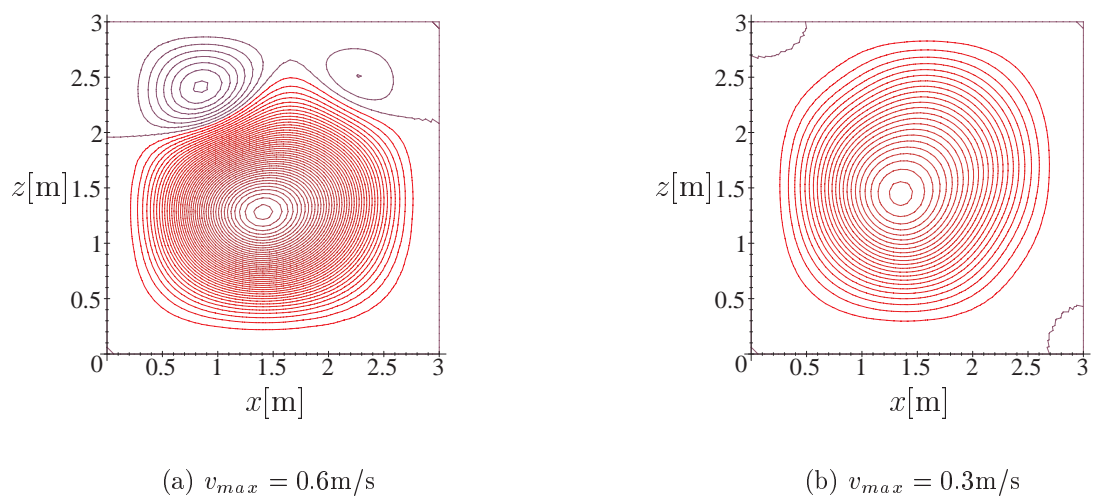


Figura 6.81: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1500\text{ s}$, b) $t_0 + 1780\text{ s}$

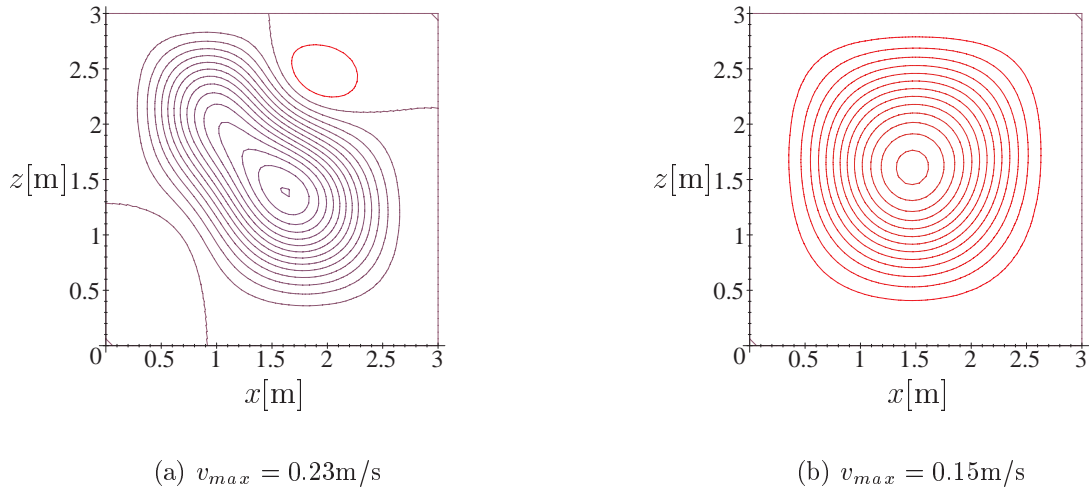


Figura 6.82: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_2 : a) $t_0 + 1880$ s, b) $t_0 + 3000$ s

O estado estacionário passa de uma situação de estabilidade para uma situação oscilatória voltando a cair numa situação estável mas com movimento convectivo, ao fim de pouco tempo.

A Figura 6.83 apresenta as velocidades máximas obtidas. De acordo com esta figura

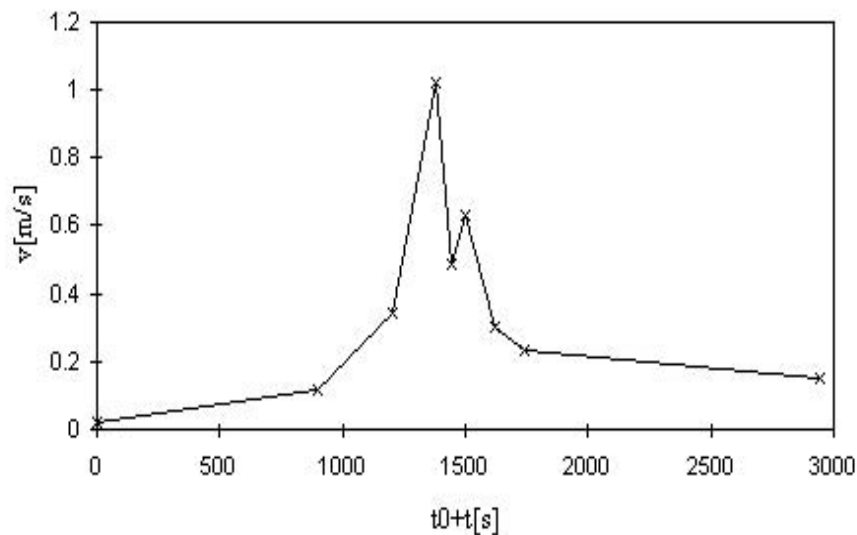


Figura 6.83: Velocidade máxima observada S_{in2} , Ω_2

após ter sido atingida uma velocidade de $v = 1$ m/s, a velocidade estaciona em cerca de 0.3 m/s, em regime convectivo.

6.6.3 Resultados obtidos para o domínio Ω_3

O domínio Ω_3 tem as dimensões reais de um Lago Solar, como por exemplo o de Pégões. A análise de um domínio deste tipo permite avaliar a aplicabilidade do modelo a situações reais, onde uma das dimensões pode ser bastante superior à outra. As figuras que se seguem mostram as linhas de corrente observadas durante um período de 3h, iniciado em $t_0 = 4$ mn no dia 113, dia onde ocorre o início de convecção. São consideradas três escalas para as velocidades, de acordo com a Figura 6.84. Devido às dimensões em causa optou-se por apresentar as figuras das linhas de corrente sem ser à escala. Apenas no fim se apresentam dois gráficos à escala.

A Figura 6.85 a) mostra quatro células bem delimitadas estando as isolinhas separadas de $0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Na Figura 6.85 b) onde o incremento é de $0.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$, aparecem seis células possuindo ainda cada uma velocidades muito baixas (inferiores a 0.3 m/s). Qualquer uma destas duas configurações é análoga às configurações das situações analisadas. Na Figura 6.85 a) a divisória entre as duas camadas estabelece-se a 1.1 m de altura, exatamente como no caso do domínio Ω_2 e ligeiramente abaixo do caso do domínio Ω_1 e do domínio Ω . Por outro lado as células são mais largas do que altas na camada inferior. Ao fim de quase duas horas a interface desloca-se para 1.7 m de altura e a configuração exhibe seis células, sendo uma delas dominante em relação às outras.

As figuras que se seguem têm uma mesma escala de velocidades sendo o incremento nas linhas de corrente de 0.1 m .

A Figura 6.86 a) apresenta uma célula central, sobre a diagonal do domínio, com um gradiente de velocidades bastante intenso, e duas células laterais de velocidades mais baixas. Na Figura 6.86 b) aparecem duas células verticais, com uma velocidade máxima de 1 m/s . Esta velocidade aumenta atingindo um valor muito elevado, 4 m/s a qual corresponde a uma situação pontual de grande instabilidade, na Figura 6.87 a) para rapidamente decair na Figura 6.87 b) em 0.5 m/s . Esta última configuração permanecerá ao longo do regime convectivo, evidenciando-se duas células.

A Figura 6.89 apresenta as linhas de corrente nos instantes t_0 (dia 113) e $t_0 + 9000 \text{ s}$, à escala.

Da observação da Figura 6.89 pode concluir-se que as duas células de convecção finais são horizontais e mais largas do que altas. A Figura 6.90 apresenta as velocidades obtidas

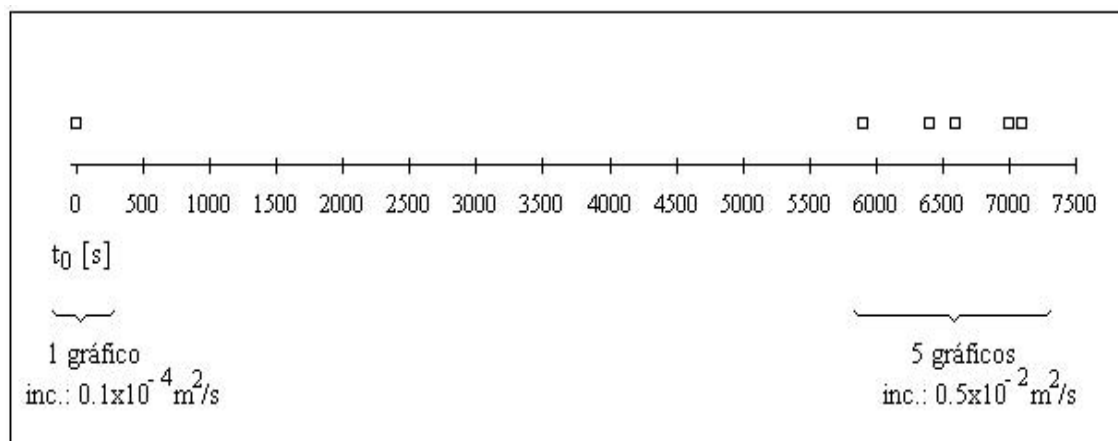


Figura 6.84: Diagrama de gráficos (ψ) considerando o domínio Ω_3 ($t_0 = 4$ mn do dia 113)

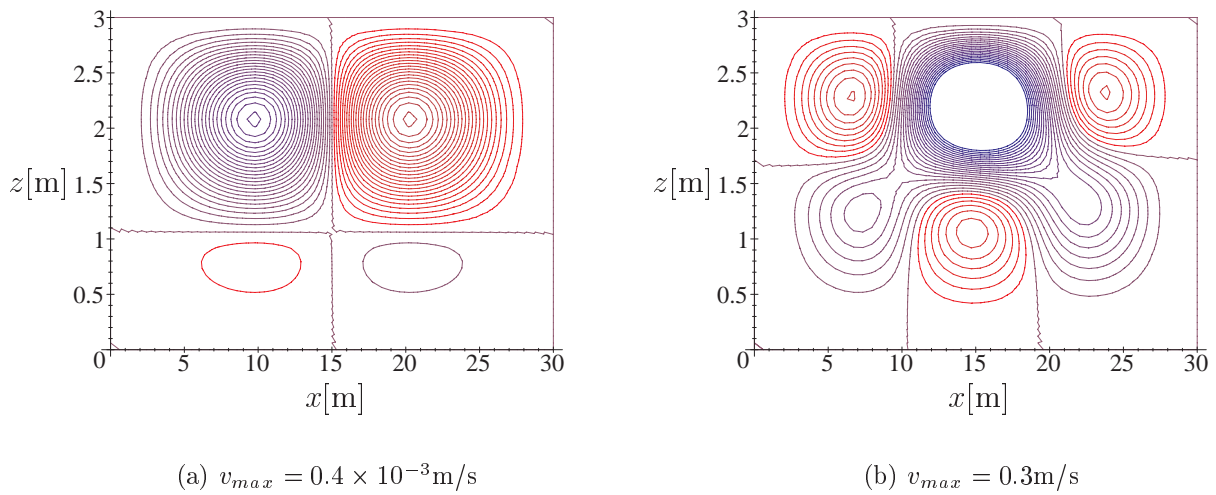


Figura 6.85: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) dia 113, b) $t_0 + 5900 \text{ s}$

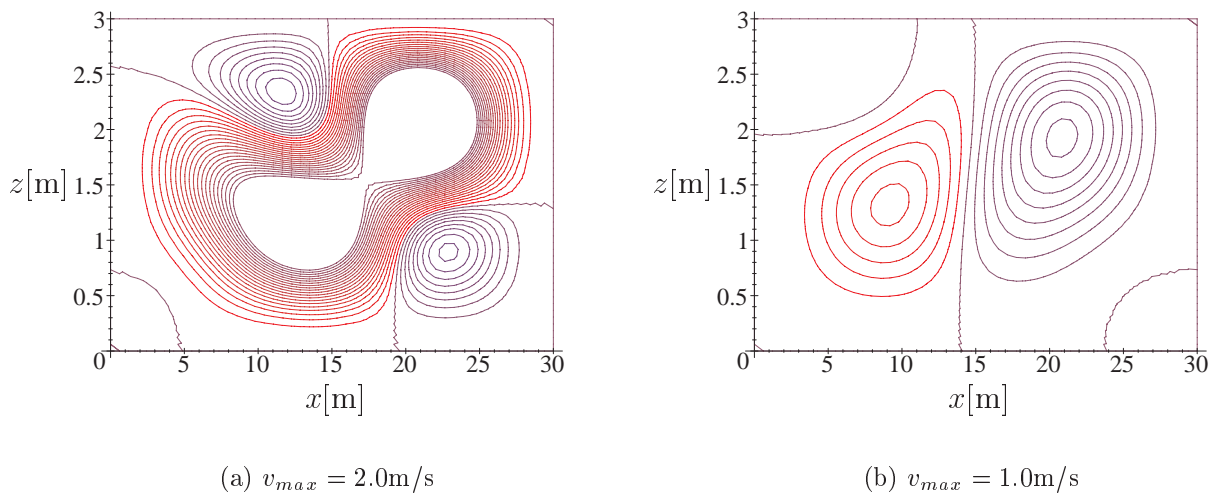


Figura 6.86: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) $t_0 + 6400 \text{ s}$, b) $t_0 + 6600 \text{ s}$

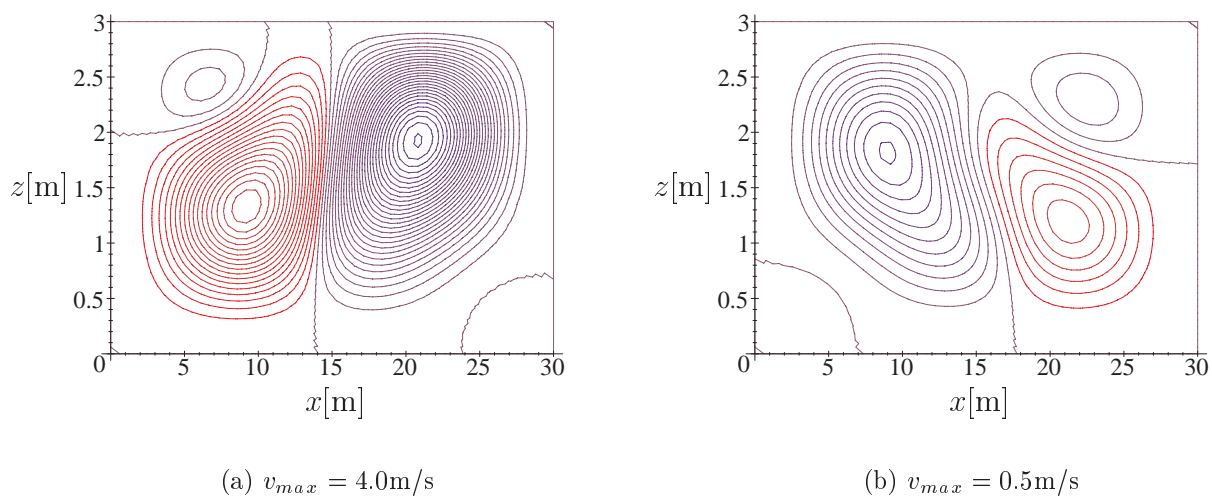


Figura 6.87: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 : a) $t_0 + 7000\text{ s}$, b) $t_0 + 7100\text{ s}$

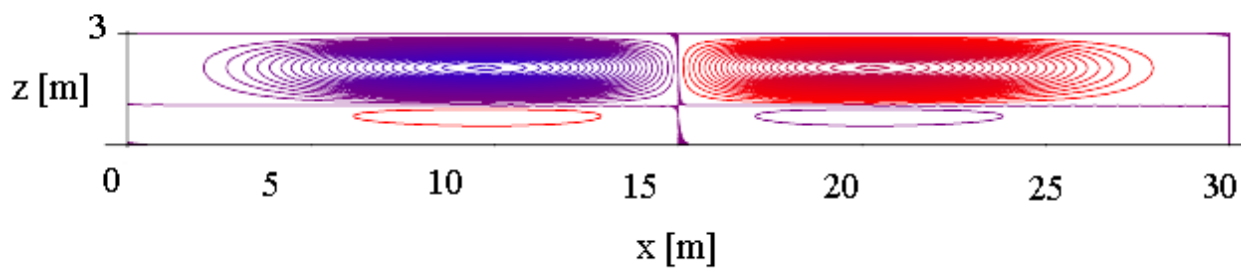


Figura 6.88: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 , $t_0 = \text{dia } 113$

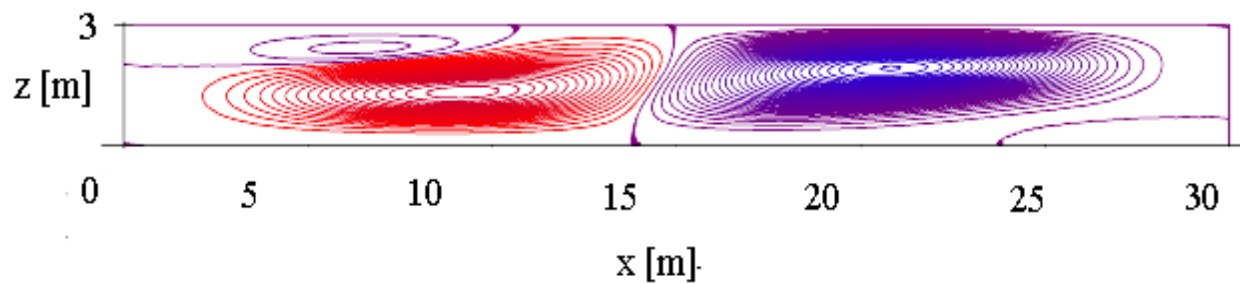


Figura 6.89: Linhas de corrente S_{in2} , Ω_3 , $t_0 + 9000\text{ s}$

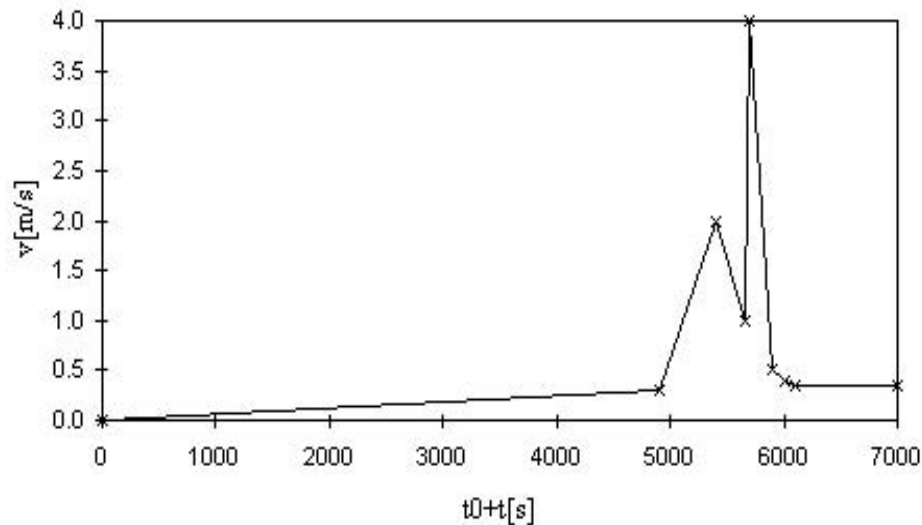


Figura 6.90: Velocidade máxima observada S_{in2} , Ω_3

nos gráficos das linhas de corrente.

Convém referir que, embora os gráficos apresentados abranjam um intervalo de tempo de cerca de 3h, a transição de regime difusivo para convectivo demorou cerca de 40.25 h ou seja quase dois dias. A velocidade máxima obtida foi $v = 4$ m/s no ponto de máxima instabilidade tendo descido e estabilizado em $v = 0.2$ m/s após convecção.

A Figura 6.91 mostra a evolução do campo da temperatura. Nesta figura o campo da temperatura não apresenta uniformidade total na camada após a instabilidade, existindo uma diferença de 3°C entre a temperatura nas fronteiras superior e inferior. No entanto, esta diferença de temperaturas diminui com o tempo, podendo concluir-se que, se o modelo avançasse para o segundo ano de funcionamento, o campo da temperatura acabaria por ficar uniforme.

Pode pois concluir-se que, num domínio onde a dimensão horizontal é muito superior à dimensão vertical, é necessário mais tempo para se obter a homogeneização de toda a camada. Observe-se que com esta geometria a mudança de regime demorou mais tempo a processar-se. O facto de só existirem duas células de convecção implica que seja difícil obter uma homogeneização rápida para o domínio Ω_3 .

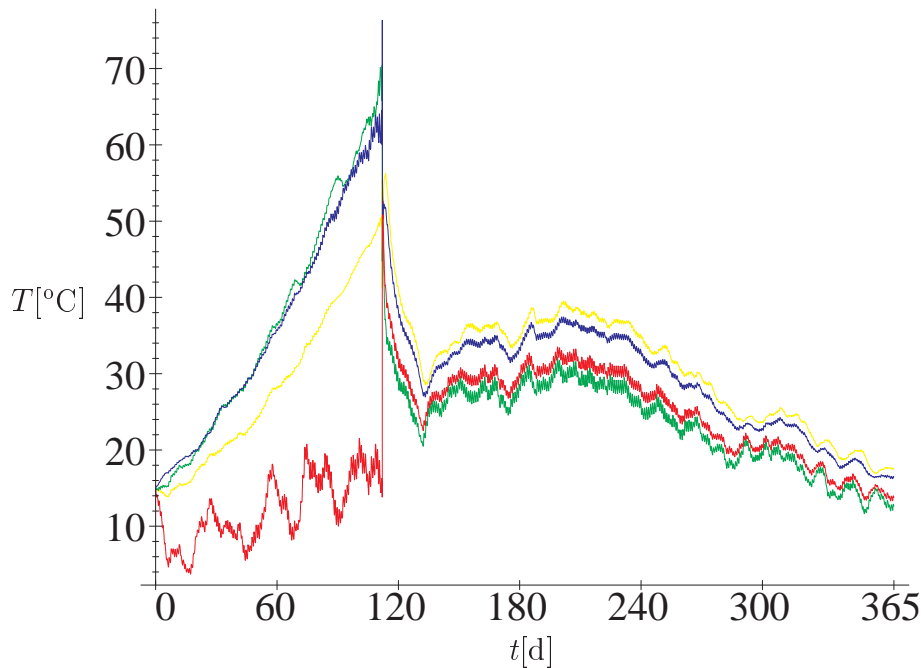


Figura 6.91: Evolução do perfil de Temperatura S_{in2}, Ω_3

6.7 Comparação dos resultados obtidos

A evolução anual dos campos da temperatura e da salinidade é idêntica para os diferentes perfis iniciais de salinidade considerados, variando apenas a data onde se inicia a convecção. Quanto maior é o gradiente de salinidade imposto inicialmente mais tarde se inicia o processo convectivo. A forma como o andamento dos campos se processa varia com a profundidade atingindo as camadas inferiores do domínio a temperatura mais elevada.

Após o início de convecção o regime convectivo estabelece-se rapidamente ficando os campos de temperatura e de salinidade uniformes.

A transição entre regime difusivo e convectivo depende da geometria do domínio, ocorrendo através de movimentos oscilatórios periódicos ou aperiódicos.

O movimento oscilatório permanece mais tempo quando o domínio apresenta uma geometria em que o comprimento é superior à altura. Caso contrário a transição dá-se rapidamente: o gradiente térmico não é suficientemente forte para desestabilizar o gradiente salino.

Numa análise mais detalhada das linhas de corrente nas diferentes situações consideradas tem-se que:

- a configuração inicial apresenta sempre quatro células bem delimitadas correspondendo aos quatro quadrantes do domínio. Tal indica que o "arranque" da velocidade ocorre sempre da mesma forma;
- estas quatro células iniciais, passam rapidamente a duas, horizontais (em domínios onde predomina a dimensão horizontal sobre a vertical) ou verticais (em domínios

onde predomina a dimensão vertical sobre a horizontal);

- durante o período de transição de regime a configuração passa por uma situação em que se evidenciam seis células;
- em relação à configuração final tem-se que:
 1. no domínio $\Omega = [0 \text{ m}, 6 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$ finaliza com duas células horizontais, mais largas do que altas;
 2. no domínio $\Omega_1 = [0 \text{ m}, 1.5 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$ finaliza com duas células horizontais, praticamente iguais;
 3. no domínio $\Omega_2 = [0 \text{ m}, 3 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$ finaliza com uma única célula;
 4. no domínio $\Omega_3 = [0 \text{ m}, 30 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$ finaliza com duas células horizontais, mais largas do que altas.
- a convecção começa mais cedo à medida que a dimensão horizontal do domínio aumenta em relação à vertical, vindo que :
 1. para $x = 1.5 \text{ m}$ o início de convecção ocorre no dia 173;
 2. para $x = 3 \text{ m}$ o início de convecção ocorre no dia 127;
 3. para $x = 6 \text{ m}$ o início de convecção ocorre no dia 116;
 4. para $x = 30 \text{ m}$ o início de convecção ocorre no dia 113.

O facto do início de convecção ser retardado em domínios mais estreitos deve-se a que nestas situações as velocidades das células são baixas. No caso contrário, domínios com as "paredes" mais afastadas desenvolvem-se velocidades altas que iniciam mais cedo o processo convectivo.

Durante o período de transição o movimento oscilatório evidencia movimentos periódicos mas também situações de movimento aperiódico. As células que se formam são estreitas e altas no caso do domínio Ω_1 assemelhando-se a plumas. Em relação ao domínio Ω_2 apenas se forma uma célula e nos restantes casos as células são, em geral e na situação de convecção, mais largas do que altas.

O Lago fica em regime convectivo estacionário ao fim de um período de tempo que varia com a geometria do domínio.

Já em regime convectivo o Lago apresenta uma divisão em duas células com uma interface a cerca de 1.5 m de altura. Esta altura varia, contudo, de acordo com o domínio considerado.

No que toca o efeito da transparência no Lago pode concluir-se que num Lago mais transparente as instabilidades começam ligeiramente mais cedo. Isto porque as temperaturas também são mais elevadas nesta situação.

6.8 Análise de Estabilidade

No Capítulo 5 estabelecem-se critérios de estabilidade para a zona gradiente do Lago considerando o efeito da absorção de radiação solar no Lago e o efeito da variação dos

coeficientes de difusão térmico e molecular, com a profundidade. Estes critérios aplicam-se, em relação ao modelo obtido no presente capítulo uma vez que, o Lago é considerado no seu todo como uma única zona gradiente.

Como no modelo desenvolvido não se está a considerar qualquer variação nos coeficientes de difusão, o critério de estabilidade que se deve tomar é o critério que leva em conta a absorção de radiação no Lago o qual, de acordo com o estabelecido no Capítulo 5, é dado por:

$$R_S > 1.074R_T \quad \mu = 0.2 \quad (6.79)$$

$$R_S > 1.125R_T \quad \mu = 0.8 \quad (6.80)$$

A análise de estabilidade é efectuada na mesma linha de Joyce (1992) cujos resultados foram apresentados no Capítulo 1.

Assim, fazendo um diagrama onde se representa o quociente R_S/R_T em função da altura z e calculando os números de Rayleigh térmico e salino para os valores médios de cada um dos intervalos de 20 cm (considerados quando se calcularam os perfis e se traçaram os gráficos (T, z) e (S, z)) pode estabelecer-se uma análise de estabilidade, observando até que ponto os valores de R_S/R_T encontrados se aproximam ou afastam da recta que traduz o limite de estabilidade.

6.8.1 Situação de perfil inicial de salinidade S_{in1}

A análise que se segue considera o domínio $\Omega = [0 \text{ m}, 6 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 3 \text{ m}]$, o perfil inicial de salinidade dado por:

$$S_{in1} = 51 \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (6.81)$$

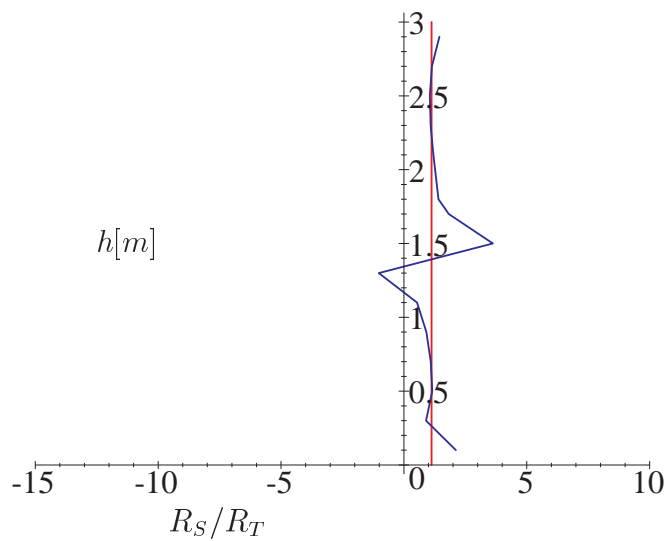
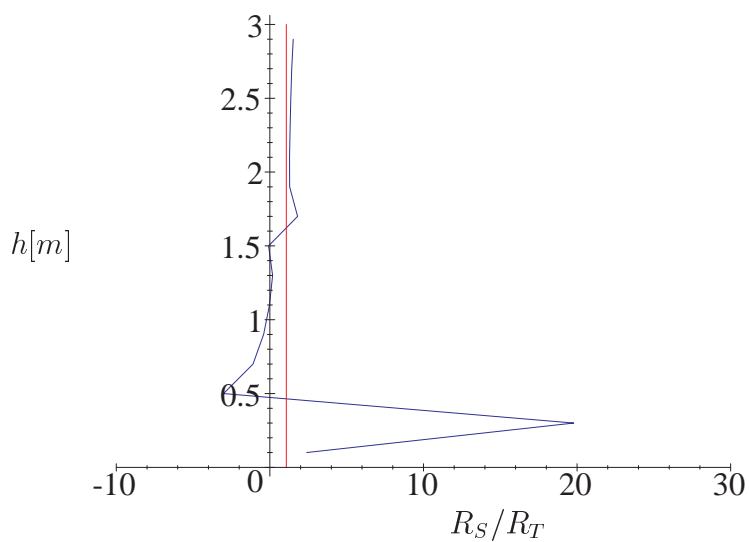
e admite um coeficiente de extinção $\mu = 0.8$. Esta análise é feita para um dado instante t pertencente ao intervalo onde se efectuou o "zoom" da evolução dos perfis de temperatura e salinidade, estando pois numa vizinhança próxima do instante onde se inicia a convecção, Figura 6.92. Nesta figura a recta a vermelho representa o limite de estabilidade (6.80) e a azul estão representados os pontos correspondentes ao quociente R_S/R_T . A Figura 6.92 está de acordo com a Figura 6.22 onde se observa um grande diferencial de temperaturas, o qual sofre uma grande oscilação durante o período focado, na zona superior do domínio.

Da observação da Figura 6.92 ressalta o facto dos pontos a azul estarem na sua maioria sobrepostos à recta do limite de estabilidade, podendo concluir-se a eminência do início de instabilidades. Pode concluir-se pois que a não diferenciação de zonas de estabilidade/instabilidade em profundidade aponta para o início de movimento convectivo em toda a camada.

6.8.2 Situação de perfil inicial de salinidade S_{in2} , $\mu = 0.8$

A Figura 6.93 mostra o diagrama de estabilidade relativo à situação S_{in2} com $\mu = 0.8$.

A zona superior revela uma grande proximidade do limite de instabilidade, prevendo-se que o movimento convectivo se inicie na parte superior da zona gradiente. A zona inferior apresenta pontos situados à direita do limite de estabilidade, os quais evidenciam uma situação estável para aquela zona. Este diagrama foi traçado para um instante pertencente

Figura 6.92: Análise de estabilidade para S_{in1} Figura 6.93: Análise de estabilidade para S_{in2} ($\mu = 0.8$)

ao primeiro intervalo onde se efectuou o "zoom" dos perfis de temperatura e salinidade que constam das Figuras 6.31 e 6.34.

As conclusões que se tiram da Figura 6.93 apontam para uma concordância com a evolução dos perfis de temperatura e de salinidade naquele intervalo, onde os mesmos sofrem uma inflexão. O facto da convecção se iniciar na zona superior do Lago está também em acordo com a observação das configurações das linhas de corrente, onde os gradientes mais intensos se situam na zona superior do domínio.

6.8.3 Situação de perfil inicial de salinidade S_{in2} , $\mu = 0.2$

Para a situação S_{in2} com $\mu = 0.2$ obtém-se a Figura 6.94 a qual mostra que as insta-

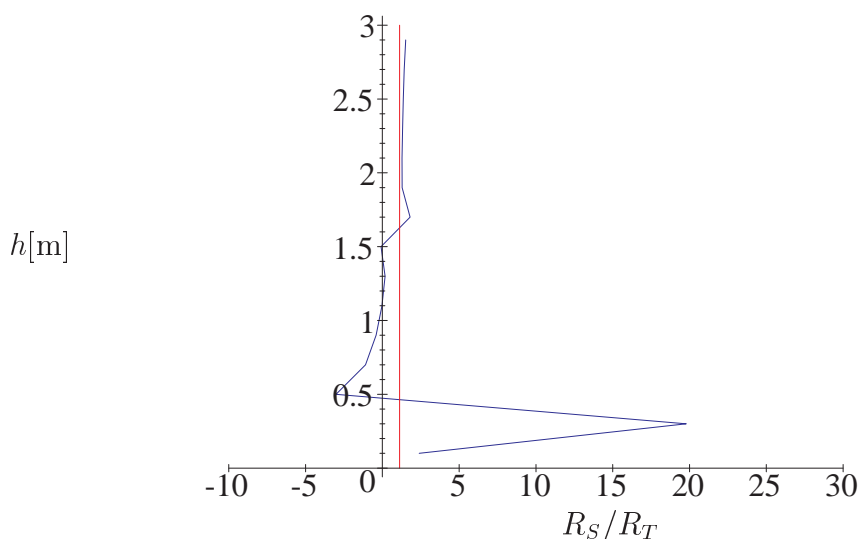


Figura 6.94: Análise de estabilidade para S_{in2} ($\mu = 0.2$)

bilidades se iniciam na zona superior da camada (linha a azul mais próxima da recta de estabilidade representada a vermelho), apresentando a camada inferior uma zona bastante estável.

Observe-se que nesta situação, de maior transparência no Lago, os valores obtidos para R_S/R_T são praticamente iguais aos obtidos na situação de Lago menos transparente.

Conclui-se que o facto da linha a azul estar a passar para o lado esquerdo da vermelha, semi-plano negativo de R_S/R_T , faz prever uma evolução para movimento convectivo e consequente desestabilização da zona gradiente, que deixa de funcionar como zona não convectiva, havendo homogeneização na camada de fluido.

De uma forma geral, pode concluir-se que a mudança de regime difusivo para convectivo após existência de instabilidades é bem visível nas simulações da evolução dos campos temperatura, a diferentes profundidades, ao longo de um ano (Figuras 6.11, 6.14, 6.16 e 6.91).

A análise de estabilidade efectuada nesta secção indica que os movimentos convectivos se iniciam na zona superior do Lago. Estes resultados estão de acordo com os apontados

pela análise da evolução dos campos de temperatura e de salinidade. Os diagramas de estabilidade dão indicação da existência de uma interface principal que divide o domínio ao meio. Existe uma interface menos acentuada a cerca de 50 cm de altura. Estas duas divisões estabelecem três zonas no Lago tendo as duas zonas superiores a mesma altura e a zona inferior apenas 50 cm. A existência desta última, que se apresenta sempre estável está relacionada com o facto do diferencial de concentração salina implicar uma maior concentração no fundo do Lago e com o facto de essa zona não oscilar muito em termos de gradiente de temperatura.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Introdução

As contribuições deste trabalho consistem na análise de estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar, perante diferentes influências, e na respectiva modelação.

A incursão feita na dinâmica da dupla difusão, com este tipo de análise, permite conhecer o funcionamento de um Lago Solar e prever a sua evolução, nomeadamente em termos de estabilidade. Neste sentido, a análise desenvolvida conduz ao estabelecimento de critérios de estabilidade e à caracterização da transição de regime difusivo a convectivo. O modelo desenvolvido considera uma formulação bidimensional e contabiliza as permutas térmicas que ocorrem nas fronteiras superior e inferior. Com a simulação efectuada pretende-se contribuir para um melhor conhecimento da dinâmica de um sistema duplamente difusivo permitindo nomeadamente:

- caracterizar a evolução dos campos de temperatura e de salinidade;
- detectar e analisar o início de movimento convectivo e a consequente desestabilização do Lago, caracterizando a mudança de regime difusivo a convectivo;
- confirmar os resultados obtidos com a análise de estabilidade da zona gradiente.

Como o início de convecção é fortemente dependente do gradiente de salinidade imposto e da geometria considerada para o domínio em estudo, analisa-se o modelo à luz de diferentes campos iniciais de salinidade e consideram-se diferentes geometrias para o domínio. O modelo também estuda o comportamento do Lago face a diferentes situações de transparência.

7.1.1 Estabilidade

A análise da estabilidade de fluidos tem sido fruto de diversos estudos, podendo dividir-se, basicamente, em duas grandes linhas: a Teoria Linear e a Teoria Global. A primeira fornece condições para o desenvolvimento de instabilidades e a segunda estabelece critérios para a existência de estados estáveis. A teoria não linear dos sistemas dinâmicos, complementa os resultados da Teoria Linear, analisando a morfologia das soluções instáveis para o que utiliza elementos da Teoria das Bifurcações.

O problema de Rayleigh-Bénard consiste na análise de estabilidade de uma camada de fluido aquecida por baixo com coeficientes de difusão térmica e salina constantes, conduzindo a perfis lineares de temperatura e salinidade.

Nestas condições, o critério de estabilidade para a camada foi determinado em termos dos números de Rayleigh térmico e salino (parâmetros críticos), por Veronis (1965) sendo os resultados obtidos largamente usados no contexto dos Lagos Solares com a finalidade de determinar o gradiente de salinidade necessário para impedir movimentos convectivos.

No entanto, a zona gradiente do Lago Solar raramente apresenta perfis de temperatura e de salinidade lineares, devido essencialmente, quer à absorção de radiação solar na camada quer ao facto dos coeficientes de difusão não serem constantes.

O presente trabalho tenta tornar a análise dos gradientes mais próxima da realidade adicionando ao modelo inicialmente proposto por Veronis, influências conducentes à obtenção de perfis não lineares. Neste sentido, efectua-se uma análise que contempla as diferentes influências na descrição da zona gradiente do Lago Solar.

As diferentes formulações do modelo que descreve o comportamento da zona gradiente, têm por base as contribuições consideradas mais importantes que podem ocorrer num Lago Solar real e admitem as condições de fronteira que melhor traduzam os fenómenos que se processam, em cada uma das situações contempladas.

Estabeleceram-se assim, no Capítulo 5, diferentes formulações do problema de dupla difusão, considerando para a mesma zona:

- a influência da absorção de radiação solar na camada que conduz à imposição de condições de Neuman para a temperatura obtendo-se um perfil não linear;
- a influência da variação dos coeficientes de difusão da temperatura e da salinidade, situação que conduz a um perfil de temperatura quase linear e a um perfil de salinidade claramente não linear;
- o conjunto das duas influências anteriores, situação que conduz a perfis de temperatura e de salinidade não lineares.

Daqui ressalta, numa primeira conclusão, que para obter ambos os perfis não lineares interessa considerar as influências de uma forma conjunta.

Analisando com mais detalhe cada uma das influências focadas, tem-se que:

1. A primeira influência considera a existência de geração interna na formulação das equações descritivas da zona gradiente, facto que implica que o perfil de temperaturas não seja linear.

Os resultados obtidos mostram que o estado marginal para a estabilidade na zona gradiente (início de movimento oscilatório) é menos restritivo em comparação com os resultados obtidos por Veronis (1965), concluindo-se que neste caso é necessário menos sal para manter a zona gradiente não convectiva do que a prevista por Veronis.

2. Considerando as influências de uma forma separada, os estados marginais de estabilidade obtidos pouco diferem dos resultados obtidos por Veronis (1965).
3. A análise conjunta da influência da absorção de radiação solar na camada e do efeito produzido pela hipótese de coeficientes de difusão variáveis conduz a que ambos os perfis de temperatura e salinidade sejam não lineares.

Os resultados obtidos nesta última situação são muito mais restritivos do que os resultados de Veronis, isto é, o início dos movimentos oscilatórios começa para valores de R_T abaixo dos valores críticos apontados pela análise clássica.

Para manter a não convectividade da camada de fluido, ou equivalentemente, para manter a camada estável torna-se, pois, necessário aumentar o gradiente de salinidade no Lago. Assim, quando se considera a influência da absorção de radiação solar e da variação dos coeficientes de difusão térmico e salino, na zona gradiente de um Lago Solar, há necessidade de uma quantidade de sal maior, do que a apontada pela análise clássica e nomeadamente por Veronis, com vista ao impedimento de ocorrência de instabilidades.

Segundo Veronis o quociente entre os números médios de Rayleigh salino e de Rayleigh térmico teria de ser 1.23 enquanto que no presente trabalho esse quociente é igual a 1.78 quando se consideram as duas influências de uma forma conjunta.

A análise da estabilidade do problema de Rayleigh-Bénard tem vindo a sofrer algumas alterações com incursão na análise não linear de estabilidade. Também no presente trabalho é abordada a análise não linear de estabilidade como forma de comprovar os resultados obtidos pela Teoria Linear.

7.1.2 Modelação

Existem vários modelos que tentam traduzir a evolução de um Lago Solar, enquanto dispositivo colector e armazenador de energia solar. Esses modelos centram-se, de um modo geral, ou na análise da evolução temporal do campo da temperatura ou do campo da salinidade, na zona gradiente do Lago.

O Modelo aqui proposto admite:

- uma análise bidimensional;
- que o Lago Solar é constituído por uma camada de fluido não diferenciada em zonas, onde é imposto um gradiente de salinidade;
- que a absorção de radiação solar conduz à formação de um gradiente térmico na camada;
- a existência de trocas térmicas ao nível das fronteiras, havendo interacção com o meio ambiente na fronteira superior e com o solo na fronteira inferior.

Com base nestas considerações analisou-se a dinâmica do Lago em geral e a transição de regime difusivo a convectivo, em particular. Da análise do modelo conclui-se que o início de convecção varia com o campo inicial de salinidade imposto e, para um mesmo campo, varia com a geometria adoptada para o domínio. Assim, quanto maior for o gradiente de salinidade, mais tarde se desenrola o início de movimento convectivo, como é de prever. Na realidade, para desestabilizar um gradiente salino intenso é necessário ter um gradiente térmico também intenso o qual demora mais tempo a ser estabelecido na camada.

Por seu lado, a situação de fraca transparência no Lago é mais propícia ao início de instabilidades do que uma situação de boa transparência. Esta constatação está de acordo com o facto das instabilidades se iniciarem na zona superior do Lago.

O modelo apresentado descreve, de uma forma adequada, o comportamento de um Lago Solar de gradiente salino. Assim, de acordo com o modelo começa-se por verificar o estabelecimento de um gradiente de temperatura a partir de uma condição inicial de temperatura uniforme na camada, como resultado da absorção de radiação solar e da presença do gradiente salino. Este gradiente aumenta até atingir o limite de estabilidade, ocorrendo nesse ponto um processo de mistura na camada, como consequência do estabelecimento do regime convectivo. A partir desse ponto a camada fica homogénea.

Resumo da evolução do Modelo

Em relação à evolução do campo das temperaturas pode dizer-se que:

1. em termos de configuração:

- enquanto a camada de fluido permanece em regime difusivo o campo da temperatura encontra-se bem diferenciado com a profundidade;
- na fronteira superior o campo da temperatura segue de perto a evolução da temperatura ambiente;
- na fronteira inferior já não se faz sentir qualquer influência da temperatura ambiente;
- nas camadas intermédias, a influência da temperatura ambiente varia decrescendo da camada mais próxima da fronteira superior para a camada mais próxima do solo;
- durante a mudança de regime difusivo para convectivo dá-se uma inversão no gradiente de temperaturas;
- no período de transição a uniformização do campo da temperatura é conseguida a partir da subida rápida da temperatura na zona superior, a qual atinge os valores das camadas inferiores, dando-se de seguida uma uniformização. Observe-se, contudo, que antes de ocorrer a subida brusca no valor da temperatura na zona superior, conducente ao início de convecção, já se tinha dado uma uniformização das temperaturas, por patamares, ao nível das camadas inferiores;
- em regime convectivo a temperatura apresenta o mesmo valor a diferentes profundidades (camada homogénea) e segue de uma forma muito aproximada a evolução da temperatura ambiente.

2. quanto aos valores atingidos:

- os valores obtidos para a temperatura nas fronteiras superior e inferior e nas camadas intermédias estão dentro dos valores esperados;
- durante o regime difusivo a temperatura na fronteira superior apresenta valores idênticos aos da temperatura ambiente;
- na vizinhança do ponto onde ocorre a passagem de regime difusivo para convectivo observam-se temperaturas com valores bastante elevados, os quais variam de acordo com o campo inicial de salinidade. Verifica-se que, para um gradiente de salinidade pouco intenso (S_{in1}) o valor da temperatura pode atingir os $35^{\circ}C$

ao nível do solo e que para um gradiente mais intenso (S_{in2}) a temperatura atingida já é da ordem dos $70^{\circ}C$;

- após a ocorrência da instabilidade, o campo da temperatura fica homogêneo, apresentando um valor idêntico ao da temperatura ambiente.

Em relação à evolução do perfil de salinidade, pode concluir-se que a resposta dada pelo modelo se situa igualmente próxima da realidade:

- durante o regime difusivo a concentração salina, nas fronteiras é ditada pelo campo inicial considerado;
- na zona de instabilidade ocorre uma mudança rápida no valor da concentração salina, dando-se ou uma queda brusca (fronteira inferior) ou uma subida brusca (fronteira superior). Esta transição é mais rápida do que a observada para o campo da temperatura e mais intensa, sendo a uniformização quase total;
- em regime convectivo a concentração salina tende para um valor médio de acordo com o campo inicialmente imposto; por exemplo para S_{in2} tende para 58 kg/m^3 em toda a camada, sendo o perfil de salinidade traduzido por uma recta vertical.

Em relação à evolução da velocidade observa-se que:

1. quanto aos valores que assume

- em regime difusivo a velocidade é nula (só se dão transferências de calor e massa por difusão);
- quando se dá o início de convecção a velocidade pode ter valores bastante altos, da ordem do 1 m/s (no caso de perfil S_{in2} e desenvolvimento a 8 modos, atinge os 2 m/s), mas esses valores (que são mais acentuados na zona superior da camada) rapidamente decaem;
- o valor que será o predominante durante o regime convectivo estacionário ronda os 0.3 m/s .

2. em termos de configuração:

- esta só começa a ter expressão quando se aproxima o início da zona de instabilidades;
- é traduzida inicialmente pela existência de quatro células distribuídas pelos quatro quadrantes do domínio, tendo as células situadas nos primeiro e segundo quadrantes uma velocidade superior à velocidade observada nas células situadas nos terceiro e quarto quadrantes;
- desta observação pode concluir-se que o movimento convectivo tende a iniciar-se na zona superior do Lago;
- durante o tempo em que se dá a mudança de regime as linhas de corrente sofrem alterações apresentando várias configurações possíveis correspondentes a movimentos oscilatórios; inicialmente existem duas células de convecção que degeneram em quatro ou seis voltando depois à configuração inicial de duas, que alternam de posição (vertical/ horizontal): as células verticais desestabilizam o Lago e as células horizontais tendem a uniformizar o mesmo;

- os movimentos oscilatórios apresentam-se periódicos e aperiódicos: por vezes há uma alteração de configuração nas células que aponta para movimentos periódicos patente na simetria das células e na alternância das mesmas relativamente a interfaces. Noutras vezes as células apresentam configurações sem qualquer simetria e que variam em escassos segundos de forma abrupta.

Durante o período de transição a forma das células de convecção varia também com a geometria do domínio em análise. Assim, num domínio onde a dimensão vertical predomine sobre a dimensão horizontal, elas assemelham-se mais a plumas térmicas, esguias e altas. Por seu lado, num domínio onde a dimensão vertical é igual à horizontal domina, em geral, uma única célula. Finalmente em domínios onde a dimensão horizontal predomina sobre a dimensão vertical as linhas de corrente apontam, quase sempre, para a existência de células mais largas do que altas;

- em regime convectivo a configuração das linhas de corrente é constante. Esta configuração varia com a geometria do domínio: para um domínio onde o comprimento é o dobro da altura a configuração final apresenta duas células horizontais, mais largas do que altas, para o domínio mais alto do que largo a configuração final exhibe duas células justapostas de igual raio, para o domínio com uma geometria quadrada a configuração final é constituída por uma célula e para o domínio onde a dimensão horizontal é dez vezes superior à dimensão vertical apresenta duas células horizontais, mais largas do que altas.

Com excepção dos resultados para o domínio de geometria quadrada, todas as situações analisadas evidenciaram, durante o período oscilatório, uma interface a meia altura do domínio, correspondente a duas células de convecção justapostas. Esta situação ocorreu durante um período de tempo superior no caso de um domínio estreito, o que está de acordo com o facto de nesta situação o início de convecção ocorrer mais tarde. Isto porque, nesta situação, a velocidade que se desenvolve é muito inferior à velocidade desenvolvida em domínios onde a dimensão horizontal predomine sobre a vertical. Em todos os casos acabou por haver uma nova instabilidade mais intensa do que a primeira, conduzindo a um período de grande alternância de configurações. Posteriormente dá-se a uniformização em todo o domínio.

A análise de estabilidade efectuada no fim do Capítulo 6 mostra que os resultados em termos de início de convecção, previstos pelo modelo, estão dentro dos limites obtidos no Capítulo 5, Caso 1, onde se considera a influência da absorção de radiação solar na camada.

Assim os valores do quociente R_S/R_T estão próximos do limite de estabilidade apontado no Capítulo 5, quando no modelo se está próximo do início de convecção e afastados quando o modelo aponta para uma situação estável.

Funcionamento de um Lago Solar

Num Lago Solar a data de início de convecção depende de três factores principais: do perfil inicial de salinidade imposto, da geometria do Lago e da transparência do mesmo.

- Quanto maior for o gradiente de salinidade inicialmente imposto, mais tarde se inicia a convecção;

- A situação de maior transparência propicia o início do processo convectivo, uma vez que nessa situação as temperaturas atingidas são mais elevadas;
- Finalmente, em domínios onde a dimensão vertical predomine sobre a horizontal, o início de convecção é retardado. Este atraso deve-se ao facto de nesta situação o número de Rayleigh térmico ser muito inferior ao da situação inversa e, conseqüentemente, a desenvolverem-se velocidades baixas;

Na situação inversa, as velocidades que se desenvolvem são mais elevadas em conseqüência do afastamento das paredes do domínio, conduzindo a que o processo convectivo se concretize mais cedo.

Observe-se que os mecanismos impeditivos de convecção, como os designados "favos de abelha", baseiam-se precisamente na subdivisão do Lago em pequenos domínios.

7.2 Sugestões para trabalho futuro

Aperfeiçoando o modelo que se desenvolveu é possível:

1. analisar o efeito da variação dos coeficientes de difusão;
2. fazer variar alguns dos parâmetros agora introduzidos como constantes e testar a respectiva importância (por exemplo a viscosidade);
3. analisar os efeitos de superfície como seja a influência do vento e da pluviosidade no alargamento da zona superior à custa da zona gradiente;
4. prever a extração de energia na zona inferior do Lago e analisar a evolução do Lago com campos iniciais de salinidade mais próximos dos utilizados nos Lagos em funcionamento;
5. analisar a influência da evaporação na interacção da superfície do Lago com o meio ambiente;
6. considerar domínios com geometrias mais complexas;
7. introduzir a tridimensionalidade e ver até que ponto os resultados agora obtidos são alterados;
8. aprofundar a resolução numérica mediante a introdução (quando tal for computacionalmente possível) de mais termos nas funções de aproximação dos campos analisados com vista a melhorar a solução obtida;
9. modelar Lagos Solares de saturação com vista a um melhor conhecimento da utilização de outros sais ou mistura de sais, que possa dar indicação do comportamento daqueles dispositivos;
10. detalhar a zona de instabilidades o que passa por uma análise das velocidades das células de convecção.

A validação experimental das conclusões tiradas em termos de estabilidade e no que respeita o comportamento do Lago pode ser feita desenvolvendo técnicas de visualização de escoamentos, nomeadamente a Velocimetria de Imagens de Partículas, PIV (método de medição óptica). Esta técnica, associada a um processo de tratamento de imagem, permite a determinação dos parâmetros característicos do escoamento, como sejam a velocidade das células de convecção e o coeficiente de transferência de calor.

Do ponto de vista do utilizador de energia solar para fins de aquecimento poderá ser acoplada ao modelo aqui proposto uma componente económica que dê algumas indicações sobre a construção de um Lago Solar em termos de gradiente salino a impôr.

O tipo de análise desenvolvida permite englobar mais do que dois componentes conduzindo à caracterização de processos onde se desenvolvam fenómenos de difusão a mais do que duas componentes.

A partir do estudo aqui desenvolvido poderá partir-se para uma análise dos processos de dupla difusão que ocorrem nos Oceanos.

Existe, pois, um vasto domínio a ser explorado, a começar pelo próprio modelo que aqui se apresenta e que poderá ser melhorado, por forma a traduzir por completo a dinâmica de um Lago Solar de gradiente salino.

Apêndice A

Absorção de radiação num Lago Solar

A.1 Radiação solar

A.1.1 Geometria Terra-Sol

Define-se Constante Solar, I_0 , como sendo a energia incidente por unidade de área e de tempo, no topo da atmosfera, numa superfície perpendicular aos raios solares, à distância média Terra-Sol, sendo o seu valor:

$$I_0 = 1353 \pm 21 \text{ Wm}^{-2} \quad (\text{A.1})$$

O facto da órbita da Terra ser elíptica implica, no entanto, que este valor varie ao longo do ano, facto pelo qual se define uma Constante Solar efectiva dada por:

$$I_{0,ef} = I_0 \left(1 + 0.033 \cos \left(\frac{360n}{365.25} \right) \right) \quad (\text{A.2})$$

onde n é o número de dias contados a partir do dia 1 de Janeiro.

A determinação da energia que atinge a superfície de um Lago Solar está relacionada com a posição do Sol no horizonte. Esta posição varia de dia para dia, e dentro de cada dia, em consequência do movimento de translação da Terra em torno do Sol e de rotação da Terra em torno do seu eixo.

Os ângulos que definem a posição do Sol são a declinação solar δ , o ângulo horário ω , e a altura do Sol h .

O ângulo δ define-se como o ângulo que, ao meio dia solar de cada dia, a direcção Terra-Sol faz com o plano do equador da Terra, podendo o seu valor ser obtido através da expressão:

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(n + 284)}{365.25} \right) \quad (\text{A.3})$$

A declinação vale 0° nos Equinócios, atinge o valor mínimo -23.45° no Solstício de Inverno e o valor máximo $+23.45^\circ$ no Solstício de Verão, como pode ser observado na Figura A.1.

O ângulo ω é igual ao produto da velocidade de rotação da Terra ($15^\circ/\text{h}$) pelo número de horas t , contadas a partir do meio dia solar. Este ângulo é por convenção, negativo de manhã e positivo à tarde. Vem dado, em graus, por:

$$\omega = \frac{360}{24}t \quad (\text{A.4})$$



Figura A.1: Movimento aparente do Sol

A altura h do Sol consiste no ângulo que a radiação incidente faz com o plano horizontal de um dado local em cada instante. O seu valor pode ser obtido, uma vez conhecida a latitude λ do local, através da expressão:

$$\sin h = \cos \delta \cos \lambda \cos \omega + \sin \delta \sin \lambda \quad (\text{A.5})$$

A Figura A.2 mostra a relação entre os ângulos que definem a posição do Sol, designando θ o ângulo zenital (ângulo que a radiação incidente faz com a normal do lugar). Uma vez definida a geometria Terra-Sol, é possível explicitar a radiação global, directa e

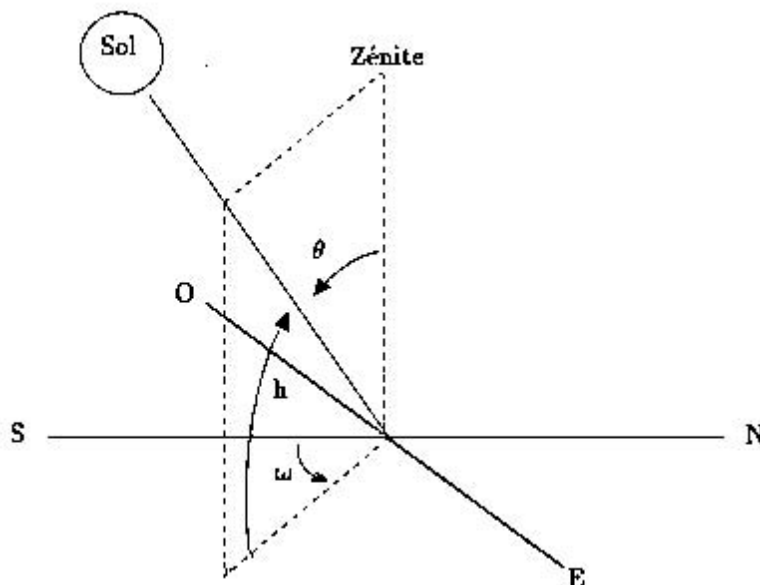


Figura A.2: Posição do Sol sobre o plano horizontal

difusa em termos dos parâmetros definidos.

A.1.2 Radiação global, directa e difusa

Define-se radiação solar global horizontal, I_h , como a radiação incidente numa superfície horizontal. A radiação global no plano horizontal, decompõe-se em radiação directa I_b e radiação difusa I_d .

A radiação directa define-se como a radiação que não sofreu qualquer desvio ao atravessar a atmosfera sendo função da posição do Sol acima do horizonte, e a radiação difusa define-se como a radiação que, tendo sido desviada do feixe directo, atinge a superfície da Terra proveniente de todas as direcções.

A radiação global incidente num plano horizontal é dada, de acordo com a respectiva definição, pela expressão:

$$I_h(t) = I_d(t) + I_b(t) \cos(\theta) \quad (\text{A.6})$$

Na segunda parcela de (A.6), a radiação directa $I_b(t)$ é dada pela expressão:

$$I_b(t) = I_{0,ef} \exp(-.042 \times TL / (\cos(\theta))^{0.8}) \quad (\text{A.7})$$

onde TL designa o coeficiente de turbidez de Linke:

$$TL = 22.76 + 0.0536\lambda - 27.78(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (\text{A.8})$$

com \mathbf{a} e \mathbf{b} coeficientes da relação de Angstrom, variáveis de local para local.

Na primeira parcela de (A.6) a radiação difusa $I_d(t)$ é por sua vez dada pela expressão:

$$I_d(t) = (0.271I_{0,ef} - 0.2939I_b(t)) \cos(\theta) \quad (\text{A.9})$$

A.2 Interação com o Lago

Quando a radiação incide numa superfície, parte é reflectida, parte é absorvida e parte é transmitida. Designando por α o coeficiente de absorção, por τ o coeficiente de transmissão e por ρ coeficiente de reflexão vem:

$$\alpha + \tau + \rho = 1 \quad (\text{A.10})$$

como facilmente se deduz da Figura A.3.

Ao incidir na superfície do Lago, parte da radiação solar é absorvida e parte é reflectida. As fracções de radiação directa e global incidentes na superfície do Lago, absorvidas e reflectidas deduzem-se recorrendo às Leis de Snell e Fresnel, supondo que a interface ar-água é plana.

A Lei de Snell relaciona o ângulo de incidência θ com o ângulo de refacção r através da equação:

$$\sin \theta = n_r \sin r \quad (\text{A.11})$$

onde n_r designa o índice de refacção da solução (ver a Figura A.3).

A partir do valor do ângulo de refração e recorrendo à teoria electromagnética é possível calcular a fracção de radiação directa transmitida $P_b(\theta)$, para cada ângulo de incidência:

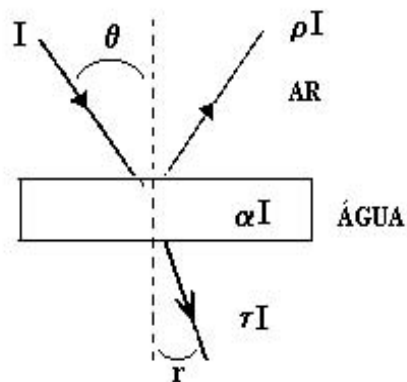


Figura A.3: Radiação

$$P_b(\theta) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2(\theta - r)}{\sin^2(\theta + r)} + \frac{\tan^2(\theta - r)}{\tan^2(\theta + r)} \right) \quad (\text{A.12})$$

A fracção de radiação difusa transmitida, $P_d(\theta)$ foi calculada em Joyce (1992), através da integração numérica de uma expressão análoga à de $P_b(\theta)$ tendo sido obtido o valor:

$$P_d = 0.934 \quad (\text{A.13})$$

Uma vez calculadas as fracções de transmissão directa e difusa e tomando (A.6) obtém-se a expressão da radiação global incidente afectada pela reflectividade das suas componentes. Tem-se:

$$I_h(t) = I_d(t)P_d + I_b(t)P_b(\theta) \cos(\theta) \quad (\text{A.14})$$

Caso se pretendam valores diários de radiação, por exemplo de radiação diária global $H_h(t)$, basta proceder a uma integração da radiação, entre o nascer e o pôr do Sol.

Apêndice B

Calculo da expressão de T_{dp}

A expressão da temperatura da atmosfera T_{ceu} relaciona a temperatura ambiente com a temperatura do ponto de orvalho T_{dp} . Esta última pode ser calculada através da humidade relativa do ar ϕ e da temperatura ambiente, resultando, de acordo com HTML (1996):

$$T_{dp} = V_3 \frac{\ln(P_s/V_1)}{V_2 - \ln(P_s/V_1)} \quad (\text{B.1})$$

onde P_s designa a pressão de vapor saturado. As constantes V_1 , V_2 e V_3 são obtidas por ajuste HTML (1996), para um intervalo de valores de temperatura do ponto de orvalho, compreendido entre -35°C e 50°C , sendo o seu erro $\ll 0.1^\circ\text{C}$, e têm por valor $V_1 = 0.61078$, $V_2 = 17.558$ e $V_3 = 241.88$.

A expressão para a pressão de vapor saturado é dada, de acordo com Rasmussen (1991), por:

$$P_s = 10^{f1} \times \frac{101292.8}{10^3} \phi \quad (\text{B.2})$$

$$f1 = (17.443 - 2795/T_{amb}(t) - 3.863 \ln(T_{amb}(t)))/\ln(10) \quad (\text{B.3})$$

Apêndice C

Programas

C.1 Introdução

Tanto a análise de estabilidade da zona gradiente de um Lago Solar, efectuada no Capítulo 5, como o modelo desenvolvido no Capítulo 6, empregam uma formulação fraca das equações de conservação e mediante a respectiva integração espacial obtêm um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) apenas dependente do tempo.

No entanto, enquanto no Capítulo 5 são tiradas as conclusões sobre os critérios de estabilidade marginal a partir da integração espacial, no Capítulo 6 é necessário efectuar a integração do sistema de EDO's.

Em relação à integração espacial da formulação fraca do sistema de equações de conservação, utilizou-se o "software" MAPLE V e para a integração numérica do sistema de EDO's no Capítulo 6 foi necessário recorrer à linguagem de programação FORTRAN 90.

As razões que conduziram à escolha do "software" MAPLE V foram:

1. a existência de um domínio com uma geometria simples, a qual permitiu utilizar funções tentativa globais a todo o domínio;
2. pretender obter relações entre números adimensionais e não resultados numéricos;
3. eliminar os erros de aproximação através da utilização da manipulação simbólica das expressões;
4. poder manipular facilmente expressões complicadas.

Assim detalhando um pouco as razões apontadas pode observar-se que no Capítulo 5 o objectivo consistiu em obter relações entre números adimensionais (os critérios de estabilidade marginal) e não resultados numéricos, facto pelo qual é importante conhecer a estrutura das expressões matemáticas. Ora, enquanto que uma linguagem de programação clássica produz resultados numéricos, um software que faça uso de elementos de Algebra Simbólica Computacional trata as expressões como identidades e só apresenta o resultado numérico quando tal é solicitado, Giestas et al. (1995). No Capítulo 5 as equações dos estados marginais têm uma certa estrutura reflectindo a existência de números adimensionais que interessa reconhecer.

Um outro aspecto da escolha deste tipo de "software" foi a necessidade de efectuar várias alterações no mesmo programa por forma a reconhecer de imediato a alteração na

estrutura das equações finais, podendo os resultados ser "afinados" e só depois recorrer à programação que envolva cálculo numérico.

Outra vantagem reside na fácil manipulação de expressões complexas e extensas, resultante da forma como as mesmas são definidas. As funções de aproximação, por exemplo, são escritas como produtos matriciais, o que implica que, em vez de nas diferentes integrações efectuadas se considerar:

$$T(x, z, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_i(x, z) \quad (\text{C.1})$$

ter-se

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \cdot \varphi \quad (\text{C.2})$$

o que facilita os cálculos agora efectuados para cada posição da matriz φ . O facto da parte espacial da função de aproximação estar desacoplada da parte temporal traduz-se numa simplificação acrescida já que, que em integrações do tipo

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \varphi d\Omega \quad (\text{C.3})$$

se torna possível considerar

$$\dot{a}_i \int_{\Omega} \varphi_i(x, z) \cdot \varphi_j(x, z) d\Omega \quad (\text{C.4})$$

sendo esta integração de simples execução, uma vez que é feita elemento a elemento da matriz produto, resultante.

A possibilidade de se utilizarem comandos como o *laplacian*($\varphi_i, [x, z]$) e o *dotprod*($\varphi_i, [x, z]$) simplifica, igualmente, toda a integração, Giestas et al. (1995).

Por todas estas razões a utilização do MAPLE V, (Monagan et al. (1996), Heal et al. (1996)) facilitou o tratamento matemático que permite chegar às equações dos estados marginais de estabilidade, no Capítulo 5.

No Capítulo 6, porém, o resultado que se pretende obter implica uma integração numérica, uma vez que são os resultados desta integração que permitem obter a evolução dos campos de temperatura e da salinidade e das linhas de corrente.

Na realidade, se a introdução de um maior número de funções tentativa (do que o utilizado no Capítulo 5) vem acrescentar alguma complicação na integração espacial do sistema de equações de conservação, o tempo de integração de alguns termos das equações em causa aumenta consideravelmente, passando da ordem dos minutos para a ordem das horas. Por exemplo, o cálculo do termo convectivo da equação de conservação da quantidade de movimento, $J(\psi, \nabla^2 \psi)$ começou por ser da ordem de várias horas. Se se considerar que se trata apenas de um termo de uma equação e que o sistema a integrar, é formado por três equações, esta situação revela-se preocupante.

A sua ultrapassagem foi possível mediante a programação do procedimento INTXSC. Este procedimento que envolve a opção "remember" permite que em integrações de somatórios com expressões do tipo $x^l z^s \sin(x)^m \cos(z)^n$ seja possível fazer uso de cálculos

prévios. É sabido que a integração deste tipo de expressões faz-se por recorrência utilizando o método de integração por partes. Sem a opção "remember" em expressões com muito termos (da ordem de 17000) o computador pode não chegar a um resultado. Com a utilização deste procedimento, o cálculo do jacobiano passa a ser da ordem de minutos.

Ultrapassada esta dificuldade e obtido o sistema de equações diferenciais ordinárias pôs-se o problema da integração numérica. O MAPLE V como linguagem simbólica que é não está vocacionado para o cálculo numérico, nomeadamente para a utilização de rotinas do tipo Runge Kutta, embora possua um pacote apreciável de rotinas numéricas, as quais conduzem a resultados em sistemas com poucas equações e com poucas iterações. No entanto, para sistemas com um número considerável de equações e com termos cruzados é impossível obter resultados, especialmente se se pretende obter os mesmos com um passo da ordem do minuto ou do segundo numa simulação anual.

Tomou-se, pois, a opção de integrar as equações diferenciais ordinárias utilizando uma linguagem conhecida pela sua robustez em termos de cálculo, o FORTRAN 90, tanto mais que a ligação entre o "software" MAPLE V e o FORTRAN é facilitada pelo facto do próprio MAPLE ter comandos que permitem exportar os cálculos, transcritos em FORTRAN, com a precisão desejada. Com esta linguagem é fácil obter a integração do sistema de EDO's a partir do momento que se escolha a subrotina de integração apropriada. No caso da modelação no Capítulo 6 essa subrotina é a DIVPAG, conhecida pela sua aplicação a sistemas rígidos. Esta subrotina utiliza o método BDF de Gear para a integração do sistema de EDO's na forma implícita $\mathbf{A}\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{t})$ e faz-se acompanhar de duas subrotinas adicionais, fornecidas pelo utilizador. Numa delas estão escritos os segundos membros das equações a integrar e na outra está a matriz do Jacobiano dos segundos membros. Como já se referiu estas subrotinas são escritas a partir do "output" do MAPLE V.

Uma vez executada a integração numérica via FORTRAN 90 os valores numéricos (neste caso os coeficientes a_i , b_i e c_i das funções de aproximação das variáveis T , S e ψ) permitem obter as soluções aproximadas no intervalo de tempo que se pretenda. A visualização destas soluções é feita novamente no MAPLE V, o qual lê os ficheiros de dados produzidos pela integração no FORTRAN 90.

Além de se traçarem os gráficos da evolução temporal ou espacial dos campos em análise também se efectua a animação destes gráficos produzindo um filme através do qual é possível ter uma ideia da evolução das variáveis.

Refira-se ainda que o MAPLE V além de ter comunicação com o FORTRAN 90, também é entendido pelo processador de texto \TeX , quer a nível de texto, quer de figuras. A introdução destas num texto escrito em \LaTeX é imediata.

Tempos de execução dos programas Os programas efectuados foram executados num PENTIUM II a 450 MHz com uma memória RAM de 64 MB e um disco de 12 GB. Alguns dos passos executados não seriam possíveis numa máquina com uma configuração inferior.

O tempo de execução de um programa que faça a integração espacial de um sistema de equações com as funções de aproximação desenvolvidas com quatro modos é de cerca de vinte minutos. Passando para um desenvolvimento das funções de aproximação a seis modos o tempo aumenta para cerca de uma hora e quando se tomam oito modos o tempo

de execução é de cerca de três horas.

A integração numérica é obviamente mais rápida, não ultrapassando os quarenta e cinco minutos, mesmo a oito modos. No entanto a partir de sistemas onde as variáveis são aproximadas por desenvolvimentos com mais de onze modos, a subrotina DIVPAG não funciona, vindo a indicação de que a capacidade de cálculo foi excedida.

O tempo de execução dos gráficos depende da extensão dos ficheiros de dados e do número de modos das funções de aproximação em causa. No caso de dados referentes a um ano, com um passo de uma hora e de funções de aproximação com desenvolvimentos a oito modos, a execução de um gráfico da evolução do campo da temperatura é da ordem da hora. A animação dos gráficos dos perfis de temperatura é mais rápida, cerca de vinte minutos, se o número de retratos não exceder a centena. Pretendendo-se ir além deste valor, o tempo de execução aumenta para duas, três horas.

A execução das linhas de corrente para um intervalo de duas horas, de dez em dez segundos é da ordem das três horas.

Conclusão Do que foi dito pode concluir-se que a junção dum "software" de Álgebra Simbólica com uma linguagem de programação adequada para o tratamento de um grande volume de cálculo foi a mais correcta para a obtenção dos resultados do Capítulo 5 e sobretudo do Capítulo 6.

C.2 Articulação dos Programas efectuados

Apresenta-se de seguida um diagrama onde se tenta dar uma ideia da forma como se articulou o "software" MAPLE V com o FORTRAN 90.

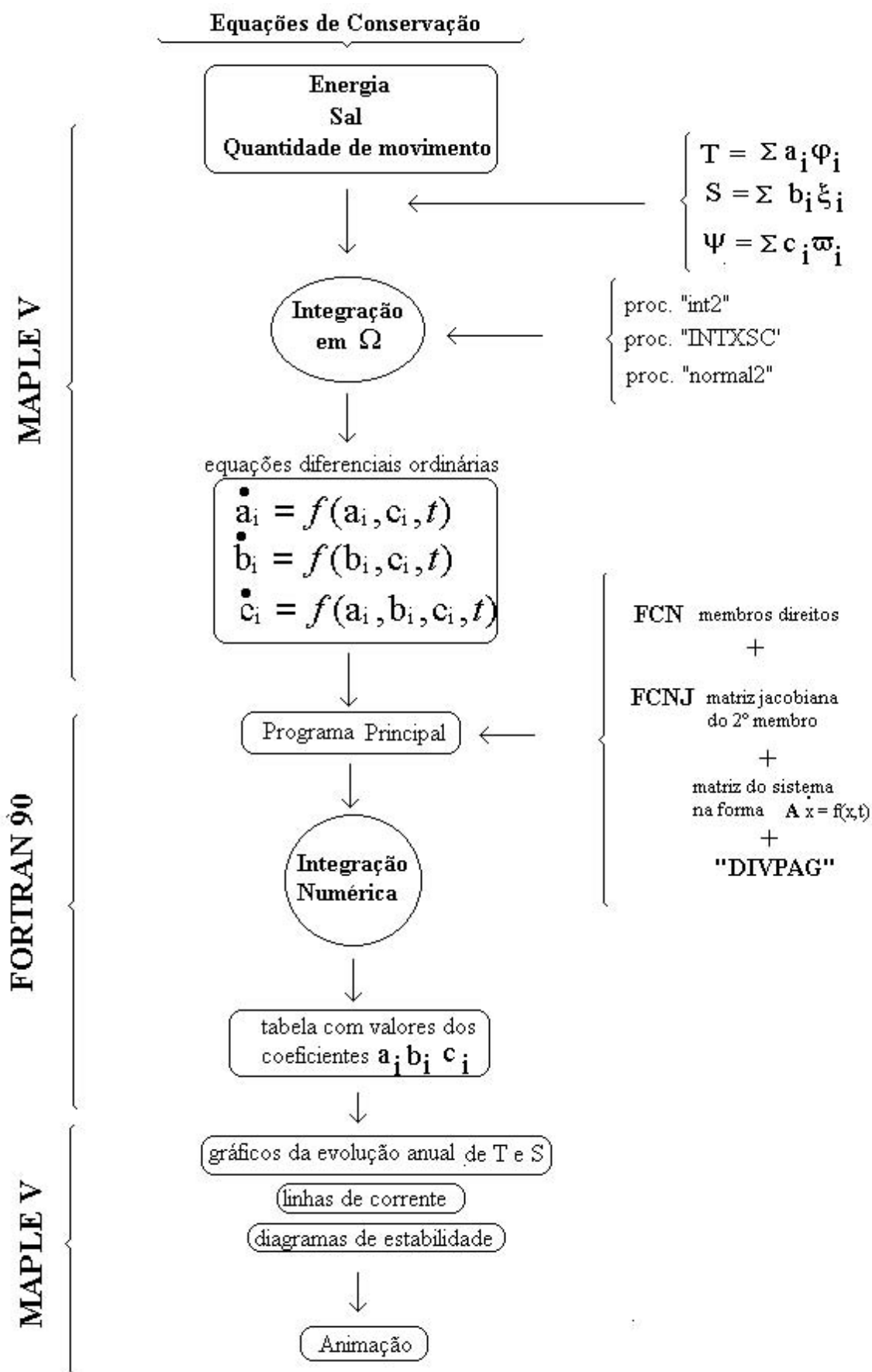


Figura C.1: Articulação dos programas efectuados

C.3 Estrutura dos Programas

Os Programas que se apresentam neste Apêndice consideram uma aproximação com quatro modos para as funções de aproximação das variáveis temperatura, salinidade e da função de corrente.

Num primeiro programa faz-se a integração da formulação fraca do sistema de equações de conservação, no domínio $\Omega = [0, \lambda] \times [0, d]$, utilizando o "software" MAPLE V e num segundo programa efectua-se a integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias que resulta da integração espacial.

A filosofia do programa em MAPLE V que segue é a seguinte:

1. Definição dos procedimentos que serão chamados repetidas vezes, neste caso o procedimento que efectua a dupla integração "int2", o procedimento "normal2" que calcula a norma L_2 de uma dada função e o procedimento "INTXSC" que faz uso da opção "remember" para conseguir proceder à integração de grandes expressões contendo produtos de senos, cosenos e polinómios nas variáveis x e z ;
2. Declarações das matrizes, dos vectores e dos parâmetros físicos;
3. Construção das funções tentativa;
4. Normalização das funções tentativa;
5. Integração da equação de conservação de energia, termo a termo onde cada termo é um vector;
6. Obtenção da equação da temperatura em termos vectoriais, a qual uma vez desacoplada conduz a tantas equações quantas as funções tentativa consideradas;
7. Integração da equação de conservação do sal;
8. Integração da equação de conservação da quantidade de movimento;
9. Obtido o sistema de equações nos coeficientes a_i , b_i e c_i procede-se ao cálculo da matriz Jacobiana do segundo membro, a qual fará parte de uma subrotina FORTRAN;
10. Introdução das equações nos coeficientes a_i , b_i e c_i , numa segunda subrotina FORTRAN, após as alterações necessárias.

O programa FORTRAN procede à integração numérica deste último sistema de equações, chamando a subrotina de integração DIVPAG do pacote IMSL e as subrotinas, fornecidas pelo utilizador, que contém os segundos membros das equações do sistema de EDO's e o Jacobiano dos segundos membros do mesmo sistema. A subrotina DIVPAG utiliza métodos Multipasso Implícitos para a resolução de sistemas de EDO's considerados rígidos.

C.4 Programa em Maple

Resolução do sistema de equações de conservação

```
> with(linalg):
> Digits:=10:
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Procedimento para efectuar a dupla integração

```
> int2 := proc(fun)
> int(int(fun,x=0..lamb),z=0..d);
> end;
>
    int2 := proc(fun) int(int(fun, x = 0 .. lamb), z = 0 .. d) end

> normal2:=proc(fun)
> sqrt(int2(fun^2));
> end;
>
    normal2 := proc(fun) sqrt(int2(fun^2)) end

> # Proc IXMSN computes int(xi^m*sin(xi)^n,xi=a..b)#
> IXMSN := proc (m,n)
> local a,b,val,aux,auxa,auxb,auxab;
> option remember;
> Digits:=20:
>   a:= 0: b:= Pi:
>   if (m*n=0) then
>     val:= int(xi^m*sin(xi)^n,xi=a..b)
>     elif (m*n=1) then val:=int(xi*sin(xi),xi=a..b)
>     elif (1<m*n) then aux:= xi^(m-1)*sin(xi)^(n-1)/n^2*(m*sin(xi)-n*xi*cos(xi)
>     auxa:= subs(xi=a,aux);
>     auxb:= subs(xi=b,aux);
>     auxab:= eval(auxb-auxa);
>     if (n=1) then val:= auxab-m*(m-1)*IXMSN(m-2,1) fi;
>     if (m=1) then val:= auxab+(n-1)/n*IXMSN(1,n-2) fi;
>     if (1<m and 1<n) then val:= auxab + (n-1)/n*IXMSN(m,n-2)-m*(m-1)/n^2*
>       IXMSN(m-2,n) fi;
>     fi;
>     Digits:=10:
>   val:=evalf(val);
>   end;

IXMSN := proc(m, n)
local a, b, val, aux, auxa, auxb, auxab;
```

```

option remember;
  Digits := 20;
  a := 0;
  b := Pi;
  if m*n = 0 then val := int(xi^m*sin(xi)^n, xi = a .. b)
  elif m*n = 1 then val := int(xi*sin(xi), xi = a .. b)
  elif 1 < m*n then
    aux := xi^(m - 1)*sin(xi)^(n - 1)*(m*sin(xi) - n*xi*cos(xi))/n^2;
    auxa := subs(xi = a, aux);
    auxb := subs(xi = b, aux);
    auxab := eval(auxb - auxa);
    if n = 1 then val := auxab - m*(m - 1)*IXMSN(m - 2, 1) fi;
    if m = 1 then val := auxab + (n - 1)*IXMSN(1, n - 2)/n fi;
    if 1 < m and 1 < n then val := auxab + (n - 1)*IXMSN(m, n - 2)/n
      - m*(m - 1)*IXMSN(m - 2, n)/n^2
    fi;
  fi;
  Digits := 10;
  val := evalf(val)
end

```

```

> # Proc IXMCN computes int(xi^m*cos(xi)^n,xi=a..b)

> IXMCN := proc (m,n)
> local a,b,val,aux,auxa,auxb,auxab;
> option remember;
> Digits:=20:
> a:= 0: b:= Pi:
  if (m*n=0) then val:= int(xi^m*cos(xi)^n,xi=a..b)
  elif (m*n=1) then val:=int(xi*cos(xi),xi=a..b)
  elif (1<m*n) then
> aux:= xi^(m-1)*cos(xi)^(n-1)/n^2*(m*cos(xi)+n*xi*sin(xi));
  auxa:= subs(xi=a,aux);
> auxb:= subs(xi=b,aux);
> auxab:=eval(auxb-auxa);
    if (n=1) then val:= auxab-m*(m-1)*IXMCN(m-2,1) fi;
    if (m=1) then val:= auxab+(n-1)/n*IXMCN(1,n-2) fi;
    if (1<m and 1<n) then
      val:= auxab + (n-1)/n*IXMCN(m,n-2)-m*(m-1)/n^2*IXMCN(m-2,n) fi;
  fi;
> Digits:=10:
> val:=evalf(val);
> end;

```

```

IXMCN := proc(m, n)
local a, b, val, aux, auxa, auxb, auxab;
option remember;

```

```

Digits := 20;
a := 0;
b := Pi;
if m*n = 0 then val := int(xi^m*cos(xi)^n, xi = a .. b)
elif m*n = 1 then val := int(xi*cos(xi), xi = a .. b)
elif 1 < m*n then
    aux := xi^(m - 1)*cos(xi)^(n - 1)*(m*cos(xi) + n*xi*sin(xi))/n^2;
    auxa := subs(xi = a, aux);
    auxb := subs(xi = b, aux);
    auxab := eval(auxb - auxa);
    if n = 1 then val := auxab - m*(m - 1)*IXMCN(m - 2, 1) fi;
    if m = 1 then val := auxab + (n - 1)*IXMCN(1, n - 2)/n fi;
    if 1 < m and 1 < n then val := auxab + (n - 1)*IXMCN(m, n - 2)/n
        - m*(m - 1)*IXMCN(m - 2, n)/n^2
    fi
fi;
Digits := 10;
val := evalf(val)
end

> # Proc IXRSPCQ computes int(xi^r*sin(xi)^p*cos(xi)^q,xi=a..b)

> IXRSPCQ := proc (r,p,q)
> local a,b,val,aux,auxa,auxb,auxab;
> option remember;
> Digits:=20:
> a:= 0: b:= Pi:
> if (p=0) then val:= IXMCN(r,q)
> elif (q=0) then val:= IXMSN(r,p)
> elif (0<p and 0<q) then
aux:= (p+q)*xi^r*sin(xi)^(p+1)*cos(xi)^(q-1)+r*xi^(r-1)*sin(xi)^p*cos(xi)^q;
auxa:= subs(xi=a,aux);
> auxb:= subs(xi=b,aux);
auxab:= eval(auxb-auxa);
if (r=0) then
    if (q=1) then val:= auxab;
val:= val/(p+q)^2;
else val:= auxab+(q-1)*(p+q)*IXRSPCQ(r,p,q-2);
val:= val/(p+q)^2;
fi;
elif (r=1) then if (q=1) then val:= auxab-r*p*IXRSPCQ(r-1,p-1,q-1);
val:= val/(p+q)^2;
else val:= auxab-r*p*IXRSPCQ(r-1,p-1,q-1)+(q-1)*(p+q)*IXRSPCQ(r,p,q-2);
val:= val/(p+q)^2;
fi;
elif (1<r) then if (q=1) then val:= auxab-r*p*IXRSPCQ(r-1,p-1,q-1)-r*
(r-1)*IXRSPCQ(r-2,p,q);

```

```

    val:= val/(p+q)^2;
    else val:= auxab-r*p*IXRSPCQ(r-1,p-1,q-1)-r*(r-1)*IXRSPCQ(r-2,p,q)+
        (q-1)*(p+q)*IXRSPCQ(r,p,q-2);
    val:= val/(p+q)^2;
    fi;
    fi;
    fi;
> Digits:=10:
> val:=evalf(val);
> end;

```

```

IXRSPCQ := proc(r, p, q)
local a, b, val, aux, auxa, auxb, auxab;
option remember;
    Digits := 20;
    a := 0;
    b := Pi;
    if p = 0 then val := IXMCN(r, q)
    elif q = 0 then val := IXMSN(r, p)
    elif 0 < p and 0 < q then
        aux := (p + q)*xi^r*sin(xi)^(p + 1)*cos(xi)^(q - 1)
            + r*xi^(r - 1)*sin(xi)^p*cos(xi)^q;
        auxa := subs(xi = a, aux);
        auxb := subs(xi = b, aux);
        auxab := eval(auxb - auxa);
        if r = 0 then
            if q = 1 then val := auxab; val := val/(p + q)^2
            else
                val :=
                    auxab + (q - 1)*(p + q)*IXRSPCQ(r, p, q - 2);
                val := val/(p + q)^2
            fi
        elif r = 1 then
            if q = 1 then
                val := auxab - r*p*IXRSPCQ(r - 1, p - 1, q - 1);
                val := val/(p + q)^2
            else
                val := auxab - r*p*IXRSPCQ(r - 1, p - 1, q - 1)
                    + (q - 1)*(p + q)*IXRSPCQ(r, p, q - 2);
                val := val/(p + q)^2
            fi
        elif 1 < r then
            if q = 1 then
                val := auxab - r*p*IXRSPCQ(r - 1, p - 1, q - 1)
                    - r*(r - 1)*IXRSPCQ(r - 2, p, q);
                val := val/(p + q)^2
            else

```

```

        val := auxab - r*p*IXRSPCQ(r - 1, p - 1, q - 1)
            - r*(r - 1)*IXRSPCQ(r - 2, p, q)
            + (q - 1)*(p + q)*IXRSPCQ(r, p, q - 2);
        val := val/(p + q)^2
    fi
fi
Digits := 10;
val := evalf(val)
end
>
> INTXSC := proc(func)
> local nterms, s, i, fun, op1, const, td, dsxi, dseta, dcxi, dceta,
> dxi, deta,ixi,ieta;
>   if hastype(func, '+') then
>     nterms := nops(func)
>   else nterms := 1
>   fi;
>   s:= 0;
>   for i to nterms do
>     if nterms = 1 then fun:=func;
>       else fun:=op(i,func);
>     fi;
>   if type (fun,numeric) then const:=fun
>   elif type(op(1,fun),numeric) then const:=op(1,fun);
>   else const:=1
>   fi;
>     td:= degree(fun);
>     dsxi:= degree(fun,sin(xi));
>     dseta:= degree(fun,sin(eta));
>     dcxi:= degree(fun, cos(xi));
>     dceta:= degree(fun, cos(eta));
>     dxi:= degree(fun/sin(xi)^dsxi/cos(xi)^dcxi,xi);
>     deta:= degree(fun/sin(eta)^dseta/cos(eta)^dceta,eta);
>   ixi:=IXRSPCQ(dxi,dsxi,dcxi);
>   ieta:=IXRSPCQ(deta,dseta,dceta);
>   s:= s + evalf(const*ixi*ieta)
>   od;
> end;
>
INTXSC := proc(func)
local nterms, s, i, fun, op1, const, td, dsxi, dseta, dcxi, dceta,
dxi, deta, ixi, ieta;
  if hastype(func, '+') then nterms := nops(func)
  else nterms := 1
  fi;
  s := 0;

```

```

for i to nterms do
  if nterms = 1 then fun := func else fun := op(i, func) fi;
  if type(fun, numeric) then const := fun
  elif type(op(1, fun), numeric) then const := op(1, fun)
  else const := 1 fi;
  td := degree(fun);
  dsxi := degree(fun, sin(xi));
  dseta := degree(fun, sin(eta));
  dcxi := degree(fun, cos(xi));
  dceta := degree(fun, cos(eta));
  dxi := degree(fun/(sin(xi)^dsxi*cos(xi)^dcxi), xi);
  deta := degree(fun/(sin(eta)^dseta*cos(eta)^dceta), eta);
  ixi := IXRSPCQ(dxi, dsxi, dcxi);
  ieta := IXRSPCQ(deta, dseta, dceta);
  s := s + evalf(const*ixi*ieta)
od
end

```

Declarações

Número de funções de aproximação

```

> N:=4:
> neq:=3*N-2;
> Ng:=5:
> vc:=[x,z]:
>

```

Parâmetros físicos

```

> lamb:=6:d:=3:
> alpha:=4.3*10^(-4):
> beta:=0.65*10^(-3):
>
> Vis:=0.58*10^(-6):
> miu:=0.8:
> emiss:=0.9:
> ksolo:=2:
> kw:=0.64:
> KS:=2.57*10^(-9):
> L:=3:
> sigma:=5.67*10^(-8):
> ag:=9.8:
>
> valsnum:={miu=0.8,kw=0.64,Cp=3940.,ro=1021.,KT=1.58*10^(-7)}:
> mudvar:={x=xi*lamb/Pi,z=eta*d/Pi}:
> cint:=lamb*d/Pi^2:
>

```

Variáveis

```

> psi:=array(1..N):
> apsi:=array(1..N):

```

```
> psig:=array(1..Ng^2);
> psigx:=array(1..Ng^2);
> psigz:=array(1..Ng^2);
> apsig:=array(1..Ng^2);
> apsigx:=array(1..Ng^2);
> apsigz:=array(1..Ng^2);
> T:=array(1..N):
> Tg:=array(1..Ng^2):
> Sg:=array(1..Ng^2):
> s:=array(1..N):
> a:=array(1..N):
> b:=array(1..N):
> c:=array(1..N):
> da:=array(1..N):
> db:=array(1..N):
> dc:=array(1..N):
> af:=array(1..neq):
> deriv:=array(1..neq):
>
```

Matrizes dos termos da equação

```
> ter1:=array(1..N,1..N):
> ter2:=array(1..N,1..N):
> ter4:=array(1..N,1..N):
> terg:=array(1..N):
> terj:=array(1..N):
> serj:=array(1..N):
> m1:=array(1..N,1..N):
> m2:=array(1..N,1..N):
> m3:=array(1..N,1..N):
> m4:=array(1..N,1..N):
> ter:=array(1..N):
>
```

Vector resultante da multiplicação das matrizes pelos coeficientes

```
> ter11:=array(1..N):
> ter22:=array(1..N):
> ter44:=array(1..N):
> ser11:=array(1..N):
> ser44:=array(1..N):
> m11:=array(1..N):
> m22:=array(1..N):
> m33:=array(1..N):
> m44:=array(1..N):
>
```

Vector dos termos resultantes dos integrais de fronteira

```
> fres:=array(1..N):
> grd:=array(1..N):
> grdv:=array(1..N):
```

```

> lap1:=array(1..N):
> jac1:=array(1..N,1..N,1..N):
> jac2:=array(1..N,1..N,1..N):
> jac3:=array(1..N,1..N,1..N):
> Temp:=array(1..N):
> Sal:=array(1..N):
> Vel:=array(1..N):
> loc:= matrix(Ng,Ng):
> eq:=array(1..neq):
> mat:=array(1..neq,1..neq):
> DYPDY:=array(1..neq,1..neq):
>

```

Posicionamento das funções de aproximação

```

> # i.e., k := loc[i,j]
> for m from 1 to Ng do
>     loc[m,m]:= (m-1)^2+1;
>     for j from 1 to m-1 do
>         loc[j,m]:= loc[m,m]+2*(m-j):
>         loc[m,j]:= loc[j,m]-1;
>     od:
> od:
> print(loc):

```

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 3 & 2 & 7 & 14 & 23 \\ 8 & 6 & 5 & 12 & 21 \\ 15 & 13 & 11 & 10 & 19 \\ 24 & 22 & 20 & 18 & 17 \end{bmatrix}$$

```

> for i from 1 to Ng do
>     for j from 1 to Ng do
>         k:=loc[i,j]:
>         psig[k]:=(z/d)^2*(1-(z/d))*(x/lamb)^2*(1-(x/lamb))^2*sin(Pi*x*i/lamb)*
>         psig[k]:=psig[k]/normal2(psig[k]);
>         Tg[k]:=(sin(Pi*x*i/lamb)*cos(Pi*j*z/d));
>     od;
> od:
>
> T[1]:=1:
> T[2]:=z/d:
>
> s[1]:=1:
> s[2]:=z/d:
>

```

```

> psi[1]:=0:
> psi[2]:=0:
> for i from 1 to N-2 do
>     psi[i+2]:=psig[i];
>     T[i+2]:=Tg[i];
>     s[i+2]:=Tg[i];
> od:
>
> for i from 1 to N do
> T[i]:=T[i]/normal2(T[i]);
> s[i]:=s[i]/normal2(s[i]);
> od;

```

Funções de aproximação para a temperatura, salinidade e
função de corrente

```

> T1:=dotprod(T,a);
> S1:=dotprod(s,b);
> Psi1:=dotprod(psi,c);
>

```

$$T1 := \frac{1}{6} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{18} z \sqrt{6} a_2 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \cos\left(\frac{1}{3} \pi z\right) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \cos\left(\frac{2}{3} \pi z\right) \sqrt{2} a_4$$

$$S1 := \frac{1}{6} \sqrt{2} b_1 + \frac{1}{18} z \sqrt{6} b_2 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \cos\left(\frac{1}{3} \pi z\right) \sqrt{2} b_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \cos\left(\frac{2}{3} \pi z\right) \sqrt{2} b_4$$

$$\Psi1 := -\frac{35}{8748} z^2 (-3+z) x^2 (-6+x)^2 \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \sin\left(\frac{1}{3} \pi z\right) \sqrt{3} \pi^7 c_3 /$$

$$(396900 \pi^6 - 5953500 \pi^4 + 107163000 \pi^2 + 4 \pi^{14} - 42525 \pi^8 + 630 \pi^{10} - 468838125)^{1/2}$$

$$- \frac{1120}{2187} z^2 (-3+z) x^2 (-6+x)^2 \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \sin\left(\frac{2}{3} \pi z\right) \sqrt{3} \pi^7 c_4 / (25401600 \pi^6$$

$$- 95256000 \pi^4 + 428652000 \pi^2 + 65536 \pi^{14} - 10886400 \pi^8 + 645120 \pi^{10} - 468838125)$$

$$^{1/2}$$

Equação de conservação da energia

Integração do termo dependente do tempo (dT/dt).T

```

> for i from 1 to N do
>     for j from i to N do
>         f:=T[i]*T[j];
>         f:=expand(f);
>         #ter1[i,j]:=evalf(int2(f));
>         f:=subs(mudvar,f);
>         f:=evalf(expand(f));
>         ter1[i,j]:=evalf(cint*INTXSC(f));
>         ter1[j,i]:=ter1[i,j];
>     od;

```

```
> od;
> print(ter1);
> ter11:=multiply(ter1,da);
```

$$\begin{bmatrix} .9999999998 & .8660254041 & 0 & 0 \\ .8660254041 & .9999999996 & -.4468903695 & 0 \\ 0 & -.4468903695 & .9999999998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000000000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ter11} := & \left[.9999999998 da_1 + .8660254041 da_2, \right. \\ & .8660254041 da_1 + .9999999996 da_2 - .4468903695 da_3, \\ & \left. -.4468903695 da_2 + .9999999998 da_3, 1.0000000000 da_4 \right] \end{aligned}$$

Integração do termo de geração interna

```
> for i from 1 to N do
>   f:=Ih*exp(-miu*(d-z))*miu/(ro*Cp)*T[i];
>   terg[i]:=evalf(int2(f));
> od:
> print(terg);
```

$$\left[1.285919003 \frac{Ih}{ro Cp}, 1.521457640 \frac{Ih}{ro Cp}, -.7237891614 \frac{Ih}{ro Cp}, 0 \right]$$

Integração do termo de difusão

```
>
> for i from 1 to N do
>   grd[i]:=grad(T[i],vc);
> od:
>
> for i from 1 to N do
>   for j from i to N do
>     f:=dotprod(grd[i],grd[j]):
>     f:=expand(f):
>     f:=subs(mudvar,f):
>     f:=evalf(expand(f)):
>     ter4[i,j]:=evalf(cint*INTXSC(f));
>     ter4[j,i]:=ter4[i,j];
>   od:
> od:
> print(ter4);
> ter44:=multiply(ter4,a);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .3333333332 & -.4900701292 & 0 \\ 0 & -.4900701292 & 1.370778389 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.483113555 \end{bmatrix}$$

$$ter44 := \left[0, .3333333332 a_2 - .4900701292 a_3, -.4900701292 a_2 + 1.370778389 a_3, 5.483113555 a_4 \right]$$

Integração do termo convectivo

```
> for i from 1 to N do
>     for j from 1 to N do
>         for k from 1 to N do
>             if k=1 then jac1[i,j,k]:=0 elif
>             k=j then jac1[i,j,k]:=0 else
>                 fun:=det(jacobian([psi[i],T[j]],vc));
>                 fun:=fun*T[k];
>                 fun:=expand(fun):
>                 fun:=subs(mudvar,fun):
>                 fun:=evalf(expand(fun)):
>                 jac1[i,j,k]:=fnormal(evalf(cint*INTXSC(fun))):
>             fi;
>         od:
>     od:
> od:
>
> for k from 1 to N do
>     temp:=0;
>     for i from 1 to N do
>         for j from 1 to N do
>             terj[k]:=(jac1[i,j,k]*c[i]*a[j]);
>             temp:=temp+terj[k]:
>         od;
>     od;
>     terj[k]:=temp;
> od;
```

$temp := 0$

$terj_1 := 0$

$temp := 0$

$$terj_2 := .04843068891 c_3 a_4 + .02967120383 c_4 a_3 - .7295125219 10^{-6} c_4 a_4$$

$temp := 0$

$terj_3 := -.1103171280 c_3 a_4 - .02967119398 c_4 a_2$

$temp := 0$

$terj_4 := -.04843067158 c_3 a_2 + .1103171407 c_3 a_3 - .1094268783 10^{-7} c_4 a_2$
 $+ .3647562610 10^{-7} c_4 a_3$

Integração dos termos de fronteira

> Td:=subs(z=d,T1);

> T0:=subs(z=0,T1);

$Td := \frac{1}{6} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{6} \sqrt{6} a_2 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \cos(\pi) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \cos(2\pi) \sqrt{2} a_4$

$T0 := \frac{1}{6} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \cos(0) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \cos(0) \sqrt{2} a_4$

> perconv:=hd*(Td-Ta);

$perconv := hd \left(\frac{1}{6} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{6} \sqrt{6} a_2 - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \sqrt{2} a_4 - Ta \right)$

> perrad:=emiss*5.67*(((Td/100)+2.73)^4-(Tc/100 +2.73)^4);

perrad :=

$5.103 \left(\frac{1}{600} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{600} \sqrt{6} a_2 - \frac{1}{300} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{300} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \sqrt{2} a_4 + 2.73 \right)^4$
 $- 5.103 \left(\frac{1}{100} Tc + 2.73 \right)^4$

> perevap:=(0.0163*hd)*(4.148*(Td^2-hum*Ta^2)-1 1.358*(Td-hum*Ta)+878.49*(1-hum));

$perevap := .0163hd \left(4.148 \left(\frac{1}{6} \sqrt{2} a_1 + \frac{1}{6} \sqrt{6} a_2 - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \sqrt{2} a_3 + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \sqrt{2} a_4 \right)^2 \right.$
 $- 4.148 hum Ta^2 - 1.893000000 \sqrt{2} a_1 - 1.893000000 \sqrt{6} a_2$
 $+ 3.786000000 \sin\left(\frac{1}{6} \pi x\right) \sqrt{2} a_3 - 3.786000000 \sin\left(\frac{1}{3} \pi x\right) \sqrt{2} a_4 + 11.358 hum Ta$
 $+ 878.49 - 878.49 hum \left. \right)$

> for i from 1 to N do

> f:=(-(perconv+perrad+perevap)/kw)*T[i];

> f:=subs(z=d,f):

> g:=((-2*(Ta-T0)/(kw*3))- (Ih*exp(-miu*d)/kw))*T[i];

> g:=subs(z=0,g):

> resu:=f-g;

> fres[i]:=evalf(int(resu,x=0..lamb));

> od:

Equação da temperatura
(Resultado Final)

```

> for i from 1 to N do
>   eq[i] :=KT*fres[i]-KT*ter44[i]+terg[i]+terj[i]:
> od:
> for i from 1 to N do
>   eq[i] :=subs(valsnum,eq[i]):
> od;
eq1 := -.4999384476 10-5 hd + .2327559822 10-6 Ta - .4948974069 10-15 a24
- .9897948135 10-15 a12 a22 - .5498860080 10-16 a14 - .1142916605 10-14 a1 a23
- .1319726418 10-14 a32 a42 + .1449992018 10-5 Tc + .1952191692 10-8 a3 a2
- .3966275073 10-6 a1 - .3299316047 10-15 a34 - .8852210120 10-9 a32
- .3299316047 10-15 a44 - .8852210120 10-9 a42 + .1127098398 10-8 a3 a1
- .5919567628 10-6 a2 - .3160000000 10-24 a4 a23 - .3160000000 10-25 a4 a13
- .1323772765 10-11 a23 - .2547601875 10-12 a13 + .3652991546 10-6 a3
+ .8649886533 10-12 a33 - .1580000000 10-16 a4 - .2647545530 10-11 a42 a2
- .1323772765 10-11 a12 a2 - .1161453794 10-6 hd a2 - .1311432547 10-8 hd a12
- .2622865094 10-8 hd a32 - .1979589628 10-14 a32 a22 - .6598632093 10-15 a32 a12
+ .7468123838 10-15 a33 a1 + .1792349722 10-14 a3 a42 a1 - .1979589628 10-14 a42 a22
- .4426105061 10-9 a12 - .1327831518 10-8 a22 - .6598632093 10-15 a42 a12
- .1533247769 10-8 a1 a2 + .3491339732 10-6 hd Ta + .4999384476 10-5 hd hum
- .2622865094 10-8 hd a42 + .3513351891 10-6 Ih + .2800546440 10-15 a3 a13
+ .2919336707 10-11 a3 a22 + .9731122351 10-12 a3 a12 + .1580000000 10-16 hd a4
+ .8537907160 10-7 hd a3 + .1580000000 10-24 a4 a1 a22 + .2520491796 10-14 a3 a1 a22
- .1580000000 10-24 a32 a4 a1 - .6705656607 10-7 hd a1 - .1580000000 10-24 a43 a1
- .3934297641 10-8 hd a22 - .1528561124 10-11 a32 a1 - .1528561124 10-11 a42 a1
+ .1455206617 10-14 a3 a23 - .1580000000 10-21 a32 a4 - .2292841688 10-11 a1 a22
+ .3339535558 10-8 hd a3 a1 + .1945540685 10-10 Tc3 + .1781630665 10-13 Tc4
+ .2075972768 10-11 a3 a42 + .1293516993 10-14 a33 a2 - .1580000000 10-21 a4 a1 a2
+ .3370959666 10-11 a3 a1 a2 - .1580000000 10-18 hd a4 a2 + .5784245261 10-8 hd a3 a2
- .4542935604 10-8 hd a1 a2 - .3809722015 10-15 a13 a2 - .6463705776 10-7 hd hum Ta
+ .2360578585 10-7 hd hum Ta2 - .3160000000 10-24 a32 a4 a2
+ .3104440784 10-14 a3 a42 a2 - .3160000000 10-24 a4 a12 a2
+ .1455206617 10-14 a3 a12 a2 - .2285833210 10-14 a42 a1 a2
- .2285833210 10-14 a32 a1 a2 - .2647545530 10-11 a32 a2 + .7966989107 10-8 Tc2
- .3160000000 10-18 hd a4 a1 ...

```

Equação de conservação do sal

```

> ser11:=multiply(ter1,db);
> ser44:=multiply(ter4,b);
> for k from 1 to N do

```

```

> temp:=0;
> for i from 1 to N do
>   for j from 1 to N do
>     serj[k] :=(jac1[i,j,k]*c[i]*b[j]);
>     temp:=temp+serj[k]:
>   od;
> od;
> serj[k] :=temp;
> od;
> for i from 1 to N do
>   eq[i+N] :=-KS*ser44[i]+serj[i];
> od;

```

$$\begin{aligned}
 ser11 := & \left[.9999999998 db_1 + .8660254041 db_2, \right. \\
 & .8660254041 db_1 + .9999999996 db_2 - .4468903695 db_3, \\
 & \left. -.4468903695 db_2 + .9999999998 db_3, 1.0000000000 db_4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ser44 := & \left[0, .3333333332 b_2 - .4900701292 b_3, - .4900701292 b_2 + 1.370778389 b_3, \right. \\
 & \left. 5.483113555 b_4 \right]
 \end{aligned}$$

$$temp := 0$$

$$serj_1 := 0$$

$$temp := 0$$

$$serj_2 := .04843068891 c_3 b_4 + .02967120383 c_4 b_3 - .7295125219 10^{-6} c_4 b_4$$

$$temp := 0$$

$$serj_3 := -.1103171280 c_3 b_4 - .02967119398 c_4 b_2$$

$$temp := 0$$

$$\begin{aligned}
 serj_4 := & -.04843067158 c_3 b_2 + .1103171407 c_3 b_3 - .1094268783 10^{-7} c_4 b_2 \\
 & + .3647562610 10^{-7} c_4 b_3
 \end{aligned}$$

$$eq_5 := 0$$

$$\begin{aligned}
 eq_6 := & -.8566666663 10^{-9} b_2 + .1259480232 10^{-8} b_3 + .04843068891 c_3 b_4 \\
 & + .02967120383 c_4 b_3 - .7295125219 10^{-6} c_4 b_4
 \end{aligned}$$

$$eq_7 :=$$

$$.1259480232 10^{-8} b_2 - .3522900460 10^{-8} b_3 - .1103171280 c_3 b_4 - .02967119398 c_4 b_2$$

$$\begin{aligned}
 eq_8 := & -.1409160184 10^{-7} b_4 - .04843067158 c_3 b_2 + .1103171407 c_3 b_3 \\
 & - .1094268783 10^{-7} c_4 b_2 + .3647562610 10^{-7} c_4 b_3
 \end{aligned}$$

Equação de conservação da quantidade de movimento

Integração do termo temporal $d(d/dt(\text{int}(-\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \psi))$

```
>
> for i from 1 to N do
>   grdv[i]:=grad(ψ[i],vc):
> od:
>
> for i from 1 to N do
>   for j from 1 to N do
>     f:=-dotprod(grdv[i],grdv[j]);
>     f:=expand(f):
>     f:=subs(mudvar,f):
>     f:=evalf(expand(f)):
>     m1[i,j]:=fnormal(evalf(cint*INTXSC(f)),10,10^(-5));
>   od;
> od;
> print(m1);
> m11:=multiply(m1,dc):
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.131559720 & .00004194697001 \\ 0 & 0 & .00004194697001 & -7.013934618 \end{bmatrix}$$

Integração do termo difusivo

```
> for i from 1 to N do
>   lap1[i]:=laplacian(ψ[i],vc):
> od;
>
> for i from 1 to N do
>   for j from i to N do
>     f:=lap1[i]*lap1[j];
>     f:=expand(f):
>     f:=subs(mudvar,f):
>     f:=evalf(expand(f)):
>     m2[i,j]:=fnormal(evalf(cint*INTXSC(f)),10,10^(-5));
>     m2[j,i]:=m2[i,j]:
>   od;
> od;
> print(m2);
> m22:=multiply(m2,c);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.51951520 & -.00002188537566 \\ 0 & 0 & -.00002188537566 & 79.23089598 \end{bmatrix}$$

$m22 :=$

$$[0, 0, 11.51951520 c_3 - .00002188537566 c_4, -.00002188537566 c_3 + 79.23089598 c_4]$$

Integração dos termos independentes

Termo da temperatura

```
> for i from 1 to N do
>   for j from 1 to N do
>     f:=diff(T[i],x)*psi[j]:
>     f:=expand(f):f:=int2(f);
>     m3[i,j]:=evalf(ag*alpha*f);
>     m4[i,j]:=evalf(ag*beta*f);
>   od:
> od:
> print(m3):
> m33:=multiply(m3,a);
>
> print(m4);
> m44:=multiply(m4,b);
```

Integração do termo convectivo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .0009188112935 \\ 0 & 0 & .001499725920 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m33 := [0, 0, .0009188112935 a_4, .001499725920 a_3]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .001388900792 \\ 0 & 0 & .002267027553 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m44 := [0, 0, .001388900792 b_4, .002267027553 b_3]$$

```

> for i from 1 to N do
>   for j from 1 to N do
>     for k from i to N do
>       if i=k then jac3[i,j,k]:=0 else
>         fun:=det(jacobian([psi[i],lap1[j]],vc))*psi[k];
>         fun:=expand(fun):
>         fun:=subs(mudvar,fun):
>         fun:=evalf(expand(fun)):
>         jac3[i,j,k]:=(evalf(cint*INTXSC(fun))):
>         jac3[k,j,i]:=-jac3[i,j,k]:
>       fi;
>       #print(i,j,k,jac3[i,j,k]):
>     od:
>   od:
> od:
> for k from 3 to N do
>   vemp:=0:
>   for i from 3 to N do
>     for j from 3 to N do
>       vemp:=vemp+jac3[i,j,k]*c[i]*c[j];
>     od;
>   od;
>   ter[k]:=vemp:
> od;

> for i from 3 to N do
>   eq[i+2*N-2]:=-m33[i]+m44[i]+Vis*m22[i]+ter[i]:
> od;

```

$$vemp := 0$$

$$ter_3 := .3473573873 c_4 c_3 + .02708023433 c_4^2$$

$$vemp := 0$$

$$ter_4 := -.3473573873 c_3^2 - .02708023433 c_4 c_3$$

$$eq_9 := -.0009188112935 a_4 + .001388900792 b_4 + .6681318816 10^{-5} c_3 \\ - .1269351788 10^{-10} c_4 + .3473573873 c_4 c_3 + .02708023433 c_4^2$$

$$eq_{10} := -.001499725920 a_3 + .002267027553 b_3 - .1269351788 10^{-10} c_3 \\ + .00004595391967 c_4 - .3473573873 c_3^2 - .02708023433 c_4 c_3$$

Calculo da Matriz e do Jacobiano

```

> for i from 1 to N do
>   for j from 1 to N do
>     mat[i,j]:=ter1[i,j]:

```

```
> mat[i+N,j+N]:=ter1[i,j]:
> od:
> od:
>
> for i from 1 to N-2 do
>   for j from 1 to N-2 do
>     mat[i+2*N,j+2*N]:=m1[i+2,j+2]:
>     od:
>   od:
>
>for j from N+1 to neq do
> for i from 1 to N do
>
>   mat[i,j]:=0;
>   od:
> od:
>for j from 1 to N do
> for i from N+1 to 2*N do
>   mat[i,j]:=0;
>   od:
> od:
>
> for j from 2*N+1 to neq do
>   for i from N+1 to 2*N do
>     mat[i,j]:=0;
>     od:
>   od:
>for j from 1 to 2*N do
>   for i from 2*N+1 to neq do
>     mat[i,j]:=0;
>     od:
>   od:
>
> print(mat);
> valordet:=det(mat);
> valorcon:=cond(mat);
```

```

      .9999999998 , .8660254041 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
      .8660254041 , .9999999996 , -.4468903695 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
      0 , -.4468903695 , .9999999998 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 1.0000000000 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 0 , .9999999998 , .8660254041 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 0 , .8660254041 , .9999999996 , -.4468903695 , 0 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 0 , 0 , -.4468903695 , .9999999998 , 0 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1.0000000000 , 0 , 0
      0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , -2.131559720 , .00004194697001
      0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , .00004194697001 , -7.013934618

```

```

      valordet := .03780986759

```

```

      valorcon := 322.5901919

```

```

> for i from 1 to N do
> a[i]:=af[i];
> da[i]:=deriv[i];
> b[i]:=af[N+i];
> db[i]:=deriv[N+i];
> od:
> for i from 3 to N do
> c[i]:=af[2*N+i-2]:
> dc[i]:=deriv[2*N+i-2]:
> od:
>
> for i from 1 to neq do
>   eq[i]:=expand(eq[i]);
> od:
>
> for i from 1 to neq do
>   for j from 1 to neq do
>     DYPDY[i,j]:=diff(eq[i],af[j]);
>   od;
> od;
>

```

Exportação dos resultados para as subrotinas FORTRAN

```

> appendto('c:/msdev/projects/sist4/fc4is.for');
> fortran(eq,precision=double,optimized);
> fortran(DYPDY,precision=double,optimized);
> fortran(mat,precision=double,optimized);

```

C.5 Programa em Fortran

Apresenta-se de seguida o programa em FORTRAN 90 que utiliza a rotina DIVPAG para fazer a integração numérica. O conjunto dos segundos membros do sistema implícito $\mathbf{A}\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{t})$ a integrar foi introduzida na subrotina FC4is, e os elementos da matriz Jacobiana dos segundos membros foram introduzidos na subrotina FCNJ4is. Os elementos da matriz \mathbf{A} são introduzidos no programa principal.

No programa principal é chamado um ficheiro de dados contendo os valores sintetizados médios diários das variáveis climáticas para o ano de 1991. Estes valores são interpolados na subrotina FC4is, obtendo-se os respectivos valores para qualquer t de integração.

Programa Principal

```

use msimslmd

c          Integração do sistema de equações de conservação

parameter (N=10,nparam=50,tfinal=31536000.0d0,ntab=8760)
integer ido,N,nparam,ntab,k1
double precision Af(N),param(nparam),tol,humint(ntab),hum,tend,t,
&taint(ntab),veint(ntab),ihint(ntab),ta,ih,ve,hd,tc,tdp,vp,num,
&Pi,temperatura30,temperatura33,sal30,sal33,tint(ntab),tinc,vol,
&mat(N,N),lnum
common tint,humint,taint,veint,ihint,ta,ve,hum,ih,hd,tc,
&tdp,vp,v1,v2,v3,i,burro

c
c          subrotinas
EXTERNAL FC4is,fcnj4is
c          condições iniciais
c          leitura de dados

Pi=4*atan(1.0)
open(17,file='c:\fichclim\1991venhumtamih.txt')
do 10 i =1,ntab
read(17,*) tint(i),taint(i),humint(i),veint(i),ihint(i)
10 continue
call dset (N,0.0D0,af,1)
Af(1)=90.0D0/sqrt(2.0d0)
Af(5)=51.D0*6.0d0/sqrt(2.0d0)
af(6)=-41.D0*6.0d0/sqrt(6.0d0)

c          matriz

mat(1,1) = 1.D0
mat(1,2) = 0.8660254038D0
mat(1,3) = 0.D0
      . . . . .
mat(1,10) = 0.D0
mat(2,1) = 0.8660254038D0
mat(2,2) = 1.D0

```

```
mat(2,3) = -0.4468903696D0
mat(2,4) = 0.D0
.....
mat(3,1) = 0.D0
mat(3,2) = -0.4468903696D0
mat(3,3) = 1.D0
mat(3,4) = 0.D0
.....
mat(4,3) = 0.D0
mat(4,4) = 1.D0
mat(4,5) = 0.D0
.....
mat(5,4) = 0.D0
mat(5,5) = 1.D0
mat(5,6) = 0.8660254038D0
mat(5,7) = 0.D0
.....
mat(6,4) = 0.D0
mat(6,5) = 0.8660254038D0
mat(6,6) = 1.D0
mat(6,7) = -0.4468903696D0
mat(6,8) = 0.D0
.....
mat(7,5) = 0.D0
mat(7,6) = -0.4468903696D0
mat(7,7) = 1.D0
.....
mat(8,7) = 0.D0
mat(8,8) = 1.D0
mat(8,9) = 0.D0
.....
mat(9,8) = 0.D0
mat(9,9) = -0.2131548412D1
mat(9,10) = -0.5927289241D-4
mat(10,1) = 0.D0
.....
mat(10,8) = 0.D0
mat(10,9) = -0.5927289241D-4
mat(10,10) = -0.7013504205D1
tol=1.0D-4
call dset(nparam,0.0D0,param,1)
tinc=0.5D0
param(3)=100.0D0
param(4)=10**11D0
param(10)=0
param(12)=1
param(13)=1
```

```

param(14)=0
param(19)=1
param(20)=N
open(15,file='dadossist4')
write(15,99)
  ido=1
  t=3600.0D0
  tend=t+tinc
  k=1
  k1=1
do while (tend.le.tfinal)
call divpag(ido,N,FC4is,fcnj4is,mat,t,tend,tol,param,Af)
temperatura30 = sqrt(2.0)*af(1)/6.0d0+af(3)*sqrt(2.0)/3.0d0
temperatura33 = sqrt(2.0)/6.0d0*af(1)+af(2)*sqrt(6.0)/
&6.0d0-af(3)*sqrt(2.0)/3.0d0
sal33=sqrt(2.0)/6.0d0*af(5)+af(6)*sqrt(6.0)/6.0d0-af(7)*
& sqrt(2.0)/3.0d0
sal30=sqrt(2.0)/6.0d0*af(5)+af(7)*sqrt(2.0)/3.0d0
num=3600.0D0
lnum=dmod(t,num)
if (lnum.eq.0) then
WRITE (*,*) k1,t,temperatura30,temperatura33,sal30,sal33,vol
write(15,'(2I10,17f14.4)') k1, k,t,Af,temperatura30,
&temperatura33,sal33,ih,ta
c   write(*,*) (param(i), i=31,35)
c   write(15,*) (param(i), i=31,35)
c   write(*,*) temperatura30, temperatura33
      k1=k1+1
      end if
      k=k+1
      tend=tend+tinc
      end do
      write(15,*) (param(i), i=31,35)
      call divpag(3,N,FC4is,fcnj4is,mat,t,tend,tol,param,Af)
99   format(4x,'k1',20x,'k',21x,'t',15x,'Af1',11x,'Af2',11x,'Af3',
&11x,'Af4',5x,'af5',16x,'af6',14x,'af7',14x,'af8',16x,'af9',14x,
&'af10',4x,'Temp30',4x,
&'Temp33',4x,'sal33',4x,'tc',4x,'tdp')
      end

```

O Programa Principal chama a subrotina "fc4is" onde são dadas as equações do sistema nos coeficientes $af(i)$, estabelecidas no MAPLE V e a subrotina "fcnj4is" onde é dada a matriz jacobiana do membro direito do sistema de equações escrito na forma implícita.

As subrotinas focadas são dadas por:

Subrotina FC4is

```
subroutine fc4is (n,t,af,eq)
```

```

parameter (ntab=8760)
double precision af(n),eq(n),humint,taint,veint,ihint,tint,
&ta,hum,ih,ve,tc,hd,t,vp,zabs,tdp
integer n,h
dimension tint(ntab),humint(ntab),taint(ntab),veint(ntab),
&ihint(ntab)
common tint,humint,taint,veint,ihint,ta,ve,hum,ih,hd,tc,
&tdp,vp,v1,v2,v3,i,burro
c          leitura dos dados
zabs=273.0D0
v1=6.1078D-1
v2=17.558D0
v3=241.88D0
c          humidade relativa
h=floor(t/3600.0D0-1.0D0)+1.0D0
var1=(t-tint(h))/3600.0D0
hum=humint(h)+(humint(h+1)-humint(h))*var1
c          temperatura ambiente
ta=taint(h)+(taint(h+1)-taint(h))*var1
c          radiação
ih=ihint(h)+(ihint(h+1)-ihint(h))*var1
c          velocidade vento
ve=veint(h)+(veint(h+1)-veint(h))*var1
c          calculo de hd
hd=2.8D0+3.0D0*ve
c          calculo de Tc
Vp=10**(17.443D0-2795.0D0/(Ta+zabs)-3.863D0*dlog(Ta+zabs)
&/dlog(10.0D0))*hum*101292.8D0/(10.0D0**3.0D0)
tdp=(241.88D0*dlog(Vp/v1))/(17.558D0-dlog(Vp/v1))
tc=(ta+zabs)*(0.8D0+tdp/250.0D0)**(0.25D0)-zabs
c          sistema de equações
t1 = af(4)*af(1)
t2 = af(2)**2.D0
t3 = t1*t2
t4 = af(1)**2.D0
t5 = af(4)*t4
t6 = t5*af(2)
t7 = af(3)*af(1)
t8 = t7*t2
t9 = hd*af(4)
t10 = t9*af(1)
t11 = t4*af(2)
t12 = Tc**2
.....
.....

t108 = 0.8483869778D-7*t48+0.626134829D-15*t66+0.6957053658D-16*t6

```

```

#7+0.452318917D-15*t68-0.1759236695D-8*t7+0.2035435126D-14*t69-0.11
#03170477D0*t70+0.4977598886D-8*t71+0.8905028683D-15*t73+0.11131285
#85D-14*t74+0.1445996449D-14*t75-0.246146124D-10*t76+0.5936685789D-
#15*t77-0.4417176926D-6*t78-0.6325126579D-5*t37+0.3855990531D-14*t8
#0-0.9028365696D-8*t81-0.2967119398D-1*af(10)*af(2)
  t111 = af(3)*af(4)
  t114 = 0.1781005736D-14*t111*t4-0.1518886688D-11*t5-0.227136591D-1
#4*t27*af(2)-0.3934121158D-14*t3-0.227136591D-14*t6-0.5212529362D-8
#*t10-0.1649083242D-5*af(4)-0.4542731822D-14*t19-0.3465184479D-7*t8
#7-0.1518886688D-11*t27-0.1311373719D-14*t28-0.1332643148D-6*t9+0.5
#471343914D-6*t29-0.3037773375D-11*t18-0.227136591D-14*t32-0.262274
#7439D-14*t58
  t124 = -0.4371245732D-15*t65+0.5836100175D-7*t70-0.3047087339D-8*t
#97-0.1759236695D-8*t1-0.4556660061D-11*t98-0.9028365696D-8*t79+0.7
#079251744D-8*t33*af(4)-0.5261577829D-11*t82+0.7145865554D-11*t111*
#af(2)+0.5343017208D-14*t111*t2+0.1809275668D-14*af(3)*t27+0.110317
#1371D0*af(9)*af(3)+0.2389258377D-8*t111-0.4843066994D-1*af(9)*af(2
#)+0.4125667402D-11*t111*af(1)+0.6169584848D-14*t111*t54+0.13569567
#51D-14*t24*af(4)
  t126 = af(9)*af(8)
  t127 = af(10)*af(8)
  t129 = af(10)*af(7)
  t136 = af(10)*af(9)
  t137 = af(10)**2.D0
  t139 = af(9)**2.D0
  eq(1) = t26+t45+t63+0.1781005736D-14*t64-0.6663215742D-7*t48-0.314
#D-25*t65-0.4917651448D-15*t66-0.5464057168D-16*t67-0.3278434299D-1
#5*t68+0.1119964864D-8*t7-0.1311373719D-14*t69+0.4924209523D-7*t70-
#0.3909397023D-8*t71+t83
.....
  return
  end

```

A subrotina que contém matriz jacobiana dos segundos membros é dada por:

Subrotina FCNJ4is

```

subroutine fcnj4is (N,t,af,DYPDY)
parameter (ntab=8760)
integer n,h
double precision af(n),t,DYPDY(N,*),ve,veint,var1,
&tint,hd
dimension tint(ntab),veint(ntab)
common tint,humint,taint,veint,ihint,ta,ve,hum,ih,hd,tc,
&tdp,vp,v1,v2,v3,i,burro
c          leitura dos dados
c          humidade relativa
h=floor(t/3600.0E0-1.0E0)+1

```

```

    var1=(t-tint(h))/3600.0E0
    ve=veint(h)+(veint(h+1)-veint(h))*var1
c          calculo de hd
c          matriz jacobiana
    t1 = af(3)**2.D0
    t2 = t1*af(3)
    t3 = af(3)*af(1)
    t4 = af(2)**2.D0
    t5 = af(3)*t4
    t6 = af(1)*af(2)
    t7 = hd*af(1)
    t8 = af(4)*af(2)
    t9 = af(4)*t4
    t10 = af(1)**2.D0
    t11 = af(4)*t10
    t12 = af(4)**2.D0
    t13 = af(3)*t12
    t14 = af(1)*t4
    .....
    t33 = -0.152354367D-8*af(2)-0.6663215742D-7*hd-0.7594433439D-12*t1
#0-0.8796183476D-9*af(1)-0.1518886687D-11*t1+0.1119964864D-8*af(3)-
#0.131137372D-14*t21-0.314D-18*t22-0.628D-24*t24-0.157D-24*t25-0.15
#7D-24*t26-0.2185622867D-15*t27-0.1135682955D-14*t28+0.8348464389D-
#15*t29-0.4514182847D-8*t30+0.2891992898D-14*t31-0.131137372D-14*t3
    .....
    .....
#04D-14*t13-0.3934121158D-14*t14-0.227136591D-14*t15+0.7145865554D-
#11*t16-0.4542731822D-14*t17-0.4556660061D-11*t4+0.7079251744D-8*t1
#8-0.4556660064D-11*t12-0.681409773D-14*t19
    t75 = -0.3047087339D-8*af(2)-0.1332643148D-6*hd-0.1518886688D-11*t
#10-0.1759236695D-8*af(1)-0.3037773375D-11*t1+0.2389258377D-8*af(3)
#-0.2622747439D-14*t21-0.4371245732D-15*t27-0.227136591D-14*t28+0.1
#781005736D-14*t29-0.9028365696D-8*t30+0.6169584848D-14*t31-0.39341
#21157D-14*t32+0.5471343914D-6*af(10)+0.5836100175D-7*af(9)
    DYPDY(1,1) = t20+t33
    DYPDY(1,2) = t35+t36
    DYPDY(1,3) = t39+t42
    DYPDY(1,4) = t44+t45
    DYPDY(1,5) = 0.D0
    .....
    DYPDY(1,9) = 0.4924209523D-7*af(4)
    DYPDY(1,10) = -0.747750335D-7*af(4)
    DYPDY(2,1) = t47+t48
    DYPDY(2,2) = t50+t51
    DYPDY(2,3) = t53+t54
    DYPDY(2,4) = t56+t57

```

DYPDY(2,5) = 0.D0

.....

DYPDY(2,9) = 0.4843066392D-1*af(4)

DYPDY(2,10) = -0.1367835979D-6*af(4)+0.2967122808D-1*af(3)

DYPDY(3,1) = t60+t61

DYPDY(3,2) = t63+t64

DYPDY(3,3) = t66+t67

DYPDY(3,4) = t69

DYPDY(3,5) = 0.D0

.....

DYPDY(3,8) = 0.D0

DYPDY(3,9) = -0.1103170477D0*af(4)

DYPDY(3,10) = 0.1641403174D-7*af(3)-0.2967119398D-1*af(2)

DYPDY(4,1) = t71

DYPDY(4,2) = t72

DYPDY(4,3) = t73

DYPDY(4,4) = t74+t75

DYPDY(4,5) = 0.D0

.....

DYPDY(4,9) = 0.1103171371D0*af(3)-0.4843066994D-1*af(2)+0.58361001
#75D-7*af(4)

DYPDY(4,10) = 0.5471343914D-6*af(4)-0.3465184479D-7*af(3)

DYPDY(5,1) = 0.D0

.....

DYPDY(5,7) = 0.D0

DYPDY(5,8) = 0.4924209523D-7*af(9)-0.747750335D-7*af(10)

DYPDY(5,9) = 0.4924209523D-7*af(8)

DYPDY(5,10) = -0.747750335D-7*af(8)

DYPDY(6,1) = 0.D0

.....

DYPDY(6,5) = 0.D0

DYPDY(6,6) = -0.8899999999D-9

DYPDY(6,7) = 0.1308487244D-8+0.2967122808D-1*af(10)

DYPDY(6,8) = 0.4843066392D-1*af(9)-0.1367835979D-6*af(10)

DYPDY(6,9) = 0.4843066392D-1*af(8)

DYPDY(6,10) = 0.2967122808D-1*af(7)-0.1367835979D-6*af(8)

DYPDY(7,1) = 0.D0

.....

DYPDY(7,5) = 0.D0

DYPDY(7,6) = 0.1308487244D-8-0.2967119398D-1*af(10)

DYPDY(7,7) = -0.3659978301D-8+0.1641403174D-7*af(10)

DYPDY(7,8) = -0.1103170477D0*af(9)

DYPDY(7,9) = -0.1103170477D0*af(8)

DYPDY(7,10) = -0.2967119398D-1*af(6)+0.1641403174D-7*af(7)

DYPDY(8,1) = 0.D0

.....

DYPDY(8,5) = 0.D0

```
DYPDY(8,6) = -0.4843066994D-1*af(9)
DYPDY(8,7) = 0.1103171371D0*af(9)-0.3465184479D-7*af(10)
DYPDY(8,8) = -0.146399132D-7+0.5836100175D-7*af(9)+0.5471343914D-6
#*af(10)
DYPDY(8,9) = -0.4843066994D-1*af(6)+0.1103171371D0*af(7)+0.5836100
#175D-7*af(8)
DYPDY(8,10) = -0.3465184479D-7*af(7)+0.5471343914D-6*af(8)
DYPDY(9,1) = 0.D0
DYPDY(9,2) = 0.D0
DYPDY(9,3) = 0.D0
DYPDY(9,4) = -0.982914407D-3
DYPDY(9,5) = 0.D0
      .....
DYPDY(9,8) = 0.1324797679D-2
DYPDY(9,9) = 0.6566152073D-5+0.3479282309D0*af(10)
DYPDY(9,10) = -0.5705079726D-10+0.3479282309D0*af(9)+0.5281670658D
#-1*af(10)
DYPDY(10,1) = 0.D0
DYPDY(10,2) = 0.D0
DYPDY(10,3) = -0.1604357963D-2
DYPDY(10,4) = 0.D0
      .....
DYPDY(10,7) = 0.2162395516D-2
DYPDY(10,8) = 0.D0
DYPDY(10,9) = -0.5705079726D-10-0.6958564618D0*af(9)-0.2640835329D
#-1*af(10)
DYPDY(10,10) = 0.4516071638D-4-0.2640835329D-1*af(9)
return
end
```


Apêndice D

Propriedades térmicas das soluções aquosas de Cloreto de Sódio

- T Temperatura [°C]
 S Concentração salina (percentagem mássica)[.%]
 ν Viscosidade cinemática [m²/s]-incerteza $\pm 2\%$
 K_S Difusibilidade molecular do cloreto de sódio [m²/s]-incerteza $\pm 5\%$
 ρ Densidade da solução salina [kg/m³]-incerteza $\pm 0.2\%$
 C_p Calor específico da solução salina [J/kg°C]-incerteza $\pm 0.2\%$
 α Coeficiente de expansão térmica [C⁻¹]-incerteza $\pm 3\%$
 β Coeficiente de "expansão" salina [m³/kg]-incerteza $\pm 3\%$
 K_T Coeficiente de difusão térmica [m²/s]

T [°C]	S [%]	ν [m ² /s]	K_S [m ² /s]	ρ [kg/m ³]	C_p [J/kg°C]	α [°C ⁻¹]	β [m ³ /kg]	K_T [m ² /s]
5	0	1.52×10^{-6}	0.98×10^{-9}	1000	4.20×10^3	0.0×10^{-4}	0.68×10^{-3}	1.35×10^{-7}
	5	1.54 "	0.90 "	1039	3.92 "	0.5 "	0.65 "	1.38 "
	10	1.62 "	0.93 "	1075	3.71 "	1.1 "	0.62 "	1.39 "
	15	1.82 "	0.96 "	1117	3.53 "	1.7 "	0.59 "	1.39 "
	20	2.02 "	0.98 "	1153	3.39 "	2.3 "	0.56 "	1.39 "
10	0	1.32 "	1.03 "	1000	4.19 "	0.7 "	0.68 "	1.38 "
	5	1.33 "	1.01 "	1036	3.92 "	1.3 "	0.65 "	1.41 "
	10	1.51 "	1.02 "	1073	3.72 "	1.9 "	0.62 "	1.42 "
	15	1.55 "	1.03 "	1112	3.54 "	2.2 "	0.59 "	1.43 "
	20	1.75 "	1.03 "	1150	3.39 "	2.7 "	0.56 "	1.43 "
15	0	1.12 "	1.21 "	999	4.18 "	1.1 "	0.67 "	1.41 "
	5	1.17 "	1.13 "	1038	3.93 "	1.4 "	0.64 "	1.43 "
	10	1.22 "	1.16 "	1072	3.72 "	1.9 "	0.61 "	1.45 "
	15	1.36 "	1.19 "	1110	3.54 "	2.4 "	0.58 "	1.46 "
	20	1.54 "	1.21 "	1150	3.40 "	3.0 "	0.55 "	1.45 "

T [°C]	S [%]	ν [m ² /s]	K_S [m ² /s]	ρ [kg/m ³]	C_p [J/kg°C]	α [°C ⁻¹]	β [m ³ /kg]	K_T [m ² /s]
20	0	0.99×10^{-6}	1.39×10^{-9}	998	4.18×10^3	2.0×10^{-4}	0.67×10^{-3}	1.43×10^{-7}
	5	1.02 "	1.30 "	1034	3.93 "	2.0 "	0.64 "	1.45 "
	10	1.09 "	1.34 "	1070	3.72 "	2.5 "	0.61 "	1.47 "
	15	1.21 "	1.35 "	1110	3.54 "	3.1 "	0.58 "	1.48 "
	20	1.37 "	1.39 "	1149	3.41 "	3.4 "	0.55 "	1.47 "
25	0	0.88 "	1.59 "	997	4.18 "	2.9 "	0.68 "	1.46 "
	5	0.91 "	1.48 "	1031	3.93 "	3.0 "	0.65 "	1.48 "
	10	0.99 "	1.51 "	1068	3.72 "	3.2 "	0.62 "	1.49 "
	15	1.10 "	1.54 "	1107	3.55 "	3.5 "	0.59 "	1.50 "
	20	1.23 "	1.57 "	1146	3.41 "	3.8 "	0.56 "	1.50 "
30	0	0.79 "	1.80 "	996	4.17 "	3.3 "	0.68 "	1.48 "
	5	0.82 "	1.68 "	1032	3.93 "	3.4 "	0.65 "	1.50 "
	10	0.88 "	1.72 "	1068	3.73 "	3.8 "	0.63 "	1.52 "
	15	0.98 "	1.76 "	1107	3.55 "	4.1 "	0.60 "	1.52 "
	20	1.10 "	1.80 "	1144	3.42 "	4.2 "	0.57 "	1.52 "
35	0	0.72 "	2.01 "	994	4.17 "	3.7 "	0.68 "	1.50 "
	5	0.74 "	1.86 "	1026	3.94 "	3.6 "	0.65 "	1.52 "
	10	0.80 "	1.90 "	1062	3.73 "	3.9 "	0.62 "	1.54 "
	15	0.88 "	1.96 "	1100	3.56 "	4.4 "	0.59 "	1.55 "
	20	0.99 "	2.01 "	1139	3.42 "	4.9 "	0.56 "	1.54 "
40	0	0.66 "	2.26 "	992	4.17 "	4.2 "	0.69 "	1.52 "
	5	0.68 "	2.10 "	1025	3.94 "	3.9 "	0.65 "	1.54 "
	10	0.73 "	2.14 "	1060	3.73 "	4.4 "	0.62 "	1.56 "
	15	0.82 "	2.19 "	1098	3.56 "	5.2 "	0.59 "	1.57 "
	20	0.89 "	2.26 "	1136	3.43 "	5.5 "	0.56 "	1.56 "
50	0	0.56 "	2.77 "	988	4.18 "	4.6 "	0.68 "	1.56 "
	5	0.58 "	2.57 "	1021	3.94 "	4.3 "	0.65 "	1.58 "
	10	0.62 "	2.63 "	1055	3.74 "	4.6 "	0.62 "	1.60 "
	15	0.66 "	2.68 "	1092	3.57 "	4.9 "	0.59 "	1.61 "
	20	0.74 "	2.77 "	1130	3.43 "	5.2 "	0.56 "	1.60 "
60	0	0.48 "	3.30 "	983	4.18 "	5.4 "	0.67 "	1.59 "
	5	0.51 "	3.07 "	1015	3.95 "	4.9 "	0.64 "	1.61 "
	10	0.55 "	3.15 "	1049	3.74 "	5.0 "	0.61 "	1.64 "
	15	0.58 "	3.23 "	1086	3.57 "	5.0 "	0.58 "	1.64 "
	20	0.63 "	3.30 "	1125	3.44 "	5.0 "	0.55 "	1.63 "
70	0	0.41 "	3.95 "	978	4.18 "	6.3 "	0.65 "	1.62 "
	5	0.44 "	3.63 "	1011	3.95 "	5.7 "	0.66 "	1.64 "
	10	0.44 "	3.68 "	1046	3.74 "	5.4 "	0.61 "	1.66 "
	15	0.52 "	3.8 "	1083	3.58 "	5.1 "	0.58 "	1.67 "
	20	0.56 "	3.95 "	1121	3.44 "	4.8 "	0.54 "	1.66 "
80	0	0.35 "	4.59 "	972	4.19 "	7.0 "	0.68 "	1.65 "
	5	0.38 "	4.26 "	1004	3.95 "	6.2 "	0.65 "	1.67 "
	10	0.43 "	4.28 "	1039	3.75 "	5.6 "	0.62 "	1.69 "
	15	0.47 "	4.44 "	1076	3.58 "	5.4 "	0.59 "	1.69 "
	20	0.50 "	4.59 "	1114	3.44 "	5.2 "	0.56 "	1.69 "

T [°C]	S [%]	ν [m ² /s]	K_S [m ² /s]	ρ [kg/m ³]	C_p [J/kg°C]	α [°C ⁻¹]	β [m ³ /kg]	K_T [m ² /s]
90	0	0.30×10^{-6}	5.26×10^{-9}	965	4.20×10^3	7.3×10^{-4}	0.68×10^{-3}	1.67×10^{-7}
	5	0.35 "	5.03 "	996	3.96 "	6.5 "	0.65 "	1.70 "
	10	0.38 "	5.03 "	1032	3.75 "	5.8 "	0.62 "	1.72 "
	15	0.42 "	5.11 "	1069	3.58 "	5.8 "	0.59 "	1.72 "
	20	0.45 "	5.26 "	1107	3.44 "	5.7 "	0.56 "	1.72 "
100	0	0.24 "	5.96 "	957	4.21 "	8.0 "	0.69 "	1.69 "
	5	0.31 "	5.69 "	992	3.97 "	6.5 "	0.69 "	1.71 "
	10	0.35 "	5.71 "	1028	3.75 "	6.0 "	0.62 "	1.73 "
	15	0.38 "	5.78 "	1065	3.58 "	6.3 "	0.60 "	1.74 "
	20	0.41 "	5.94 "	1103	3.44 "	6.3 "	0.56 "	1.73 "

Bibliografia

- R. H. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Reading M. A., New York, 1978.
- J. N. Agar and J. C. R. Turner. Thermal Diffusion in Solutions of Electrolytes. *Proc. Roy. Soc. London*, A(255):307, 1960.
- R. Aguiar. *CLIMED 1.2-Time Series Generator:User's Guide and Manual*. INETI-ITE, Departamento de Energias Renováveis, Lisboa, 1998.
- A. Akbarzadeh and G. Ahmadi. Computer simulation of the performance of a solar pond in the southern part of Iran. *Solar Energy*, 24(143), 1980.
- W. F. Ames. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Academic Press, Inc., 1965.
- A. Andronov and L. Pontryagrine. Systèmes grossiers. *Dokl. Akad. Nauk.*, 14:247–251, 1937.
- V. I. Arnold. *Mathematical Methods of classical mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- A. A. Azhari. *Solar Energy in Saudi Arabia with special reference to growth of the lower convecting zone in the salt gradient solar pond*. PhD thesis, University of Reading, U.K., 1988.
- P. G. Baines and A. E. Gill. On Thermohaline convection with linear gradients. *Journ. Fluid Mech.*, 37: 289–306, 1969.
- B. J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- G. S. Beavers, E. M. Sparrow, and R. A. Magnuson. Experiments in the breakdown of laminar flow on a parallel plat channel. *Int. Journ. Heat and Mass Transfer*, 13:809, 1970.
- H. Bénard. Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue générale des Sciences pures et appliqués*, 11:1261–71, 1900.
- H. Bénard. Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Annales de Chimie et de Physique*, 23:62–144, 1901.
- D. L. Bernstein. Existence Theorems in Partial Differential Equations. Princeton University Press, N.J., 1950.
- R. Betchov and W. O. Criminale. *Stability of Parallel Flow*. Academic Press, New York, 1967.
- G. D. Birkhoff. Dynamical Systems. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publi.*, (9), 1927.
- M. J. Block. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, 178:650, 1956. citado por Joseph (1976a).
- I. S. Bowen. The ratio of heat loss by conduction and by evaporation from any water surface. *Physical Review*, (27):779, 1926. citado por Duffie and Beckman (1980).

- H. C. Bryant. A demonstration Salt Gradient Solar Pond. Eg-77-s-04-3977, The University of New Mexico, 1979.
- H. C. Bryant and I. Colberk. A Solar Pond for London. *Solar Energy*, 19(321), 1977.
- F. M. Busse. Recent developments in the dynamo theory of planetary magnetism. *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, 11:241–68, 1983.
- D. R. Caldwell. Experimental studies of the onset of thermohaline convection. *Journ. Fluid Mech.*, 64: 347–367, 1974.
- C. Canut, M. Y. Hussaini, and A. Quarteroni. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London and New York, 1960.
- Y. S. Cha, W. T. Sha, and W. W. Schertz. Modeling of the surface convective layer of salt gradient solar ponds. *Journ. of Solar Energy Engineering*, 104:293–298, 1982.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, 1961.
- G. S. Charlson and R. L. Sani. Thermoconvective instability in a bounded cylindrical layer. *Int. Journ. of Heat and Mass Transfer*, 13:1479, 1976.
- C. W. Clenshaw and H. J. Norton. *Comp. Journ.*, 6:88, 1963.
- M. Collares-Pereira, A. Joyce, and L. Valle. A salt gradient solar pond for greenhouse heating. In *Congresso da American Section of ISES*, Houston, 1981.
- S. D. Conte and Carl de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill, 1980.
- L.N. Da Costa, E. Knobloch, and N. O. Weiss. Oscillations in double-diffusive convection. *Journ. Fluid Mech.*, 109(257):25–43, 1981.
- M. Couette. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chem. Phys.*, 21:433, 1890.
- J. Crank. *Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, London and New York, 1956.
- D. Crevier. An experimental solar pond for industrial process heat. Technical report, Quebec, Canada, 1982.
- J. M. K. Dake and D. R. F. Harleman. Thermal stratification in lakes: analytical and laboratory studies. *Water Resources Res.*, 5(484), 1969.
- S. J. Davies and C. M. White. An experimental study of water in pipes of rectangular section. *Proc. Royal Soc.*, (119):92, 1928.
- S. H. Davis. Convection in a box: linear theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 30:465, 1967.
- V. E. Delnore. Numerical Simulation of Thermohaline convection in the Upper Ocean. *Journ. Fluid Mech.*, 96:803–826, 1980.
- J. Doria, M. C. Andres, J. Yugero, A. Alonso, and M. Collares-Pereira. Aplicacion de los estanques solares a I) purificacion de Na NO₃ II) Obtencion de KNO. In *III Congreso Iberico de Energia Solar*, Madrid, 1987.
- J. Doria, M. C. Andres, J. Yugero, C. Armenta, and M. Collares-Pereira. Obtencion of KCl from "Silvinita" in solar ponds. In *V Congreso Ibérico de Energias Renováveis*, Madrid, 1990.

- P. Drazin and L. N. Howard. Hydrodynamic Stability of parallel flow of inviscid fluid. *Adv. in Appl. Mech.*, 9(1), 1966.
- J. A. Duffie and W. A. Beckman. *Solar Engineering of thermal processes*. J. Wiley and Sons, 1980.
- H. Dulac. Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math.*, 1923.
- E. Eliassen, B. Machenhauer, and E Rasmussen. On a Numerical Method for Integration of the Hydrodynamical Equations with a Spectral Representation of the Horizontal Fields. Technical Report 2, 1970.
- M. J. Feigenbaum. The onset spectrum of turbulence. *Phys. Lett.*, (74):375–378, 1980.
- B. A. Finlayson. The Galerkin method applied to convective instability problems. *Journ. Fluid Mech.*, 33:201–208, 1968.
- B. A. Finlayson and L. E. Scriven. The method of weighted residuals. *Appl. Mech. Rev.*, 19:735–748, 1966.
- S. Folchitto and D. Ruggi. Uno stagno solare a gradiente salino per la produzione di acqua dissalata. In *38° Congresso Nazionale dell'associazione termotecnica Italiana*, 1983.
- T. D. Foster. Onset of convection in layer of liquid cooled from above. *Phys. Fluids*, 8:1770–1774, 1965.
- L. Fox. *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Macmillan (Pergamon), New York, 1962.
- R. A. Frazer and W. P. Jones. Approximations to functions and to the solutions of differential equations. 1-517, Grt. Britain Air Ministry Aero. Res. Comm., 1937.
- R. L. French and E. I. M. Lin. Status Report: Salton Sea Solar Pond Power Plant. Paper no 819731, Joint Engineering Power Generation Conference, 1981.
- A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- R. P. Fynn and T. H. Short. *Solar Ponds-A basic manual*. The Ohio State University, 1983.
- G. P. Galdi. Alcuni casi di non esistenza del massimo funzionale associato ad una riformulazione del metodo Dell'Energia. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 59, 1975.
- G. P. Galdi and B. Straughan. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 89:211, 1985.
- C. W. Gear. *Numerical Initial value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- M. Giestas, A. Joyce, and H. Pina. The influence of radiation absorption on solar ponds stability. *Journ. Heat and Mass Transfer*, 39:3873–3885, 1996.
- M. Giestas, A. Joyce, and H. Pina. The influence of non-constant diffusivities on solar ponds stability. *Journ. Heat and Mass Transfer*, 40(18):4379–4391, 1997.
- M. Giestas, H. Pina, and A. Joyce. The use of Symbolic Computation in Fluid Stability Problems, 1995.
- A. E. Goldreich and G. Schubert. Differential rotation in stars. *Astrophys. Journ.*, 150:571–587, 1967.
- J. P. Gollub and S. V. Benson. Many routes to turbulent convection. *Journ. Fluid Mech.*, 100:449–470, 1980.
- D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Application*, 1977.

- M. C. Gregg and C. S. Cox. The vertical microstructure of temperature and salinity. *Deep Sea Research*, 19:355–376, 1972.
- J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- M. Hadidy, B. Nimmo, and S. Zubair. Salt gradient solar ponds in the eastern province of Saudi Arabia: numerical and experimental results, 1980.
- P. Hall and I. C. Walton. *Proc. Roy. Soc.*, 358(199), 1977.
- G. Y. Haltiner and R. T. Williams. *Numerical Prediction and Dynamical Meteorology*. John Wiley & Sons, New York, 1980.
- M. N. A. Hawlader and B. J. Brinkworth. An analysis of the non convecting solar pond. *Solar Energy*, 27:195–204, 1981a.
- M. N. A. Hawlader and B. J. Brinkworth. An analysis of the non-convecting solar pond. *Solar Energy*, 27(3):195–204, 1981b.
- K. M. Heal, M. L. Hansen, and K. M. Rickard. *Learning Guide*. Springer, 1996.
- M. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- R. E. Hoare. Problems in heat transfer in Lake Varda, a density stratified Antarctic Lake. *Nature*, (210): 787–789, 1966.
- E. Hopf. *Ergodic Theory*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1937.
- E. Hopf. A mathematical example displaying features of turbulence. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1: 303–311, 1948.
- HTML. Calculating Dew Point from RH and Air Temperature. Technical note 16, 1996.
- J. R. Hull. Computer simulation of solar pond thermal behaviour. *Solar Energy*, 25(33), 1980.
- K. V. Hull and W. I. Shu. Dependence of ground heat loss upon solar pond size and perimeter insolation. *Solar Energy*, 33(1):25–33, 1984.
- H. E. Huppert. Transitions in double diffusion convection. *Nature*, 263:20–22, 1976.
- H. E. Huppert and D. R. Moore. Nonlinear double-diffusive convection. *Journ. Fluid Mech.*, 78:821–54, 1976.
- T. J. Hurle and E. Jakeman. Soret-driven thermosolutal convection. *Journ. Fluid Mech.*, 47:667–687, 1971.
- G. Iooss. Existence et stabilité de la solution périodique secondaire intervenant dans les problèmes dévolution du type navier-stokes. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 40(301), 1972.
- M. C. Irwin. *Smooyh Dynamical Systems*. Academic Press, 1980.
- G. C. Jain. Heating of solar pond. Paris, 1973. UNESCO Congress-Sun service Mankind.
- M. Jarraud and A. P. M. Baede. The use of Spectral Techniques in Numerical Weather Prediction, in Large Scale Computation in Fluids Mechanics. *Lect. in Appl. Math.*, 22:1–41, 1985.
- T. S. Jayadev and J. Henderson. Salt concentration gradient solar ponds. Modeling and Optimization. Colorado, 1979.

- H. Jeffreys. The stability of a layer of fluid heated from below. *Philos. Mag.*, 2:833–844, 1926.
- H. Jeffreys. Some cases of instability in fluid motion. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, (118):195–208, 1928.
- W. S. Jevons. On the cirrous form of cloud. *London Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. Sci.*, 4: 14–35, 1857.
- D. D. Joseph. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20(59), 1965.
- D. D. Joseph. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 22(163), 1966.
- D. D. Joseph. *Stability of Fluid Motions*, volume 2. Springer, Berlin, 1976a.
- D. D. Joseph. *Stability of Fluid Motions*, volume 1. Springer Verlag, Berlin, 1976b.
- D. D. Joseph and C. C. Shir. *Journ. Fluid Mech.*, 25:753, 1966.
- A. Joyce. Construção e estudo de um lago solar de gradiente de salinidade: Tese de Mestrado em Transferência e Conversão de Energia. Master's thesis, I.S.T., 1984.
- A. Joyce. The use of a salt gradient solar pond as a heat source for desalination plants. In *New Technologies for the use of renewable energy sources in water desalination*, Atenas, 1991. Seminário realizado no âmbito do Programa Thermie.
- A. Joyce. *Lagos Solares: Contribuição para o desenvolvimento de uma tecnologia. Tese de Doutorado em Ciência dos Materiais, ramo de Conversão de Energia*. PhD thesis, U.N.L, 1992.
- A. Joyce, M. Giestas, and H. Pina. The dynamics of free convection in a Solar Pond. volume 2, Reading, 1992. A.A. M. Sayigh.
- A. V. Kalecsinsky. Ueber die ungarischen warmen und heissen kochsalzseen als natuerlich waermeaccumulatoren. *Ann. Physik IV*, 7:408, 1902. citado por Joyce (1992).
- L. V. Kantorovich and V. I. Krylov. *Approximate Methods in Higher Analysis*. Wiley, New York, 1958.
- J. T. O. Kirk. Effect of scattering and absorption on solar pond efficiency. *Solar Energy*, 40(2):107–116, 1988.
- E. Knobloch and M. R. E. Proctor. Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems. *Journ. Fluid Mech.*, 108:291–316, 1981.
- C. F. Kooi. The steady state salt gradient solar pond. *Solar Energy*, 23:37–45, 1979.
- L. Koschmieder. *Advances in Chemical Physics*, 26, 1973.
- H. Kreiss and J. Oliger. *Methods for the approximate solution of time dependent problems*. Unipub Inc., New York, 1973.
- C. Lanczos. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *J. Math. Phys.*, 17:123–199, 1938.
- L. Landau. On the problem of turbulence. *C. R. Acad. Sci. URSS*, 44:311–315, 1944.
- J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Jour. de Math. Pures et Appl.*, 12(1), 1933.
- G. Lesino and L. Saravia. Solar Ponds in hydrometallurgy and salt production. *Solar Energy*, 46(6): 377–382, 1991.
- G. Lesino, L. Saravia, J. Mangussi, and R. Caso. Operation of a 400m² sodium sulphate solar pond in Salta, Argentina. *International Solar Pond Letters*, 1(1,2), 1982.

- A. Libchaber and J. Maurer. Une experience de Rayleigh-Bénard de géometrie réduite: multiplication accrochage et démultiplication de fréquences. *J. Phys.*, 41, 1980.
- A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer Verlag, 1992.
- A. Lindstedt. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. *Mémoires de l'Académie de Saint Petersburg*, 1882. citado por ?).
- D. E. Loper and P. M. Roberts. Compositional convection and the gravitationally powered dynamo. *Stellar and Planetary Magnetism*, pages 297–327, 1983.
- H. R. A. Mallock. Determination of the viscosity of water. *Proc. Royal Soc.*, (45):126, 1888.
- P. Manneville and Y. Pomeau. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica*, 1:219–226, 1980.
- B. P. Marett. Double Diffusive Interface Behaviour; growth and erosion in Solar Ponds. Technical report, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Melbourne, Australia, 3052, 1987.
- J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer, 1976.
- C. J. Marzec and E. A. Spiegel. Ordinary differential equations with strange attractors. *SIAM Journ. Appl. Math.*, 38:403–21, 1980.
- R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, (261):459–467, 1976.
- D. P. McKenzie and F. M. Richter. Parameterized thermal convection in a layered region and the thermal history of the Earth. *Journ. Geophys. Res.*, 86:11667–80, 1981.
- C. E. Mendenhall and M. Mason. The stratified subsidence of fine particles. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 9:199–210, 1923.
- B. Mercier. *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*. Springer Verlag, 1989. Lecture Notes in Physics.
- K. A. Meyer, D. P. Grimmer, and G. F. Jones. An experimental and theoretical study of salt-gradient pond interface behaviour. *Progress in Solar Energy*, 1982.
- M.B. Monagan, K. O. Gedds, K. M. Heal, G. Lebahn, and S. M. Vorkoetter. *Programming Guide*. Springer, 1996.
- A. S. Monin and A. M. Yaglom. Statistical Fluid Mechanics. *Mechanics of Turbulence*, 1, 1971.
- D. R. Moore and N.O. Weiss. Two-dimensional Rayleigh-Bénard convection. *Journ. Fluid Mech.*, 58: 289–312, 1973.
- D. Mukutmoni and K. T. Yang. Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio enclosure: Part I-bifurcation to oscillatory convection. *Journ. Heat Transfer*, 115:360–366, 1993a.
- D. Mukutmoni and K. T. Yang. Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio enclosure: Part II-bifurcation to chaos. *Journ. Heat Transfer*, 115:367–376, 1993b.
- R. G. Munns, R. J. Stanley, and C. D. Densmore. Hydrographic observation of the Red Sea brines. *Nature*, 214:1215–1217, 1967.
- S. Neshyba. Oceanography-Perspectives on a fluid earth. 1987. citado por Joyce (1992).
- D. A. Nield. The Thermohaline Rayleigh-Jeffreys Problem. *Journ. Fluid Mech.*, 29:545, 1967.
- D. A. Nield, D. M. Manole, and J. L. Lage. Convection induced by inclined thermal and solute gradients in a shallow horizontal layer of a porous medium. *Journ. Fluid Mech.*, 257:559–574, 1993.

- H. J. Norton. *Comp. Journ.*, 7:76, 1964.
- S. A. Orszag. Numerical methods for the simulation of turbulence. *Phys. Fluids*, 2(12):250–257, 1969.
- S. A. Orszag. Transform method for calculation of vector coupled sums : Application to the spectral form of the vorticity equation. *J. Atmosph. Sci.*, 27:890–895, 1970.
- S. A. Orszag. Comparison of pseudospectral and spectral approximations. *Sru. Appli. Math.*, 51:253–259, 1972.
- M. Ouni, A. Guizani, and A. Belguith. Simulation of the transient behaviour of a salt gradient solar pond in Tunisia. *Renewable Energy*, 14(1–4):69–76, 1998.
- C. E. Pearson. A numerical study of the time-dependent viscous flow between two rotating spheres. *Acta Math.*, 7, 1885.
- M. Peixoto. On Structural Stability. *Ann. of Math.*, 69(2):199–222, 1959.
- A. Pellew and R. V. Southwell. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc.*, (176):312–343, 1940.
- H. G. Pina. *Métodos Numéricos*. McGraw Hill, 1995.
- J. K. Platten and J. C. Legros. *Convection in Liquids*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.*, 7, 1885.
- H. Poincaré. Sur les equations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *Amer. J. Math.*, 12: 211, 1890.
- M. Posnansky. Technical and economical aspects of solar desalination with particular emphasis on solar pond powered distillation desalination plant. Hamburg, 1987. ISES, Solar World Congress.
- M. R. E. Proctor. Steady subcritical thermohaline convection. *Journ. Fluid Mech.*, 105:507–21, 1981.
- A. Rabl and C. E. Nielsen. Solar Ponds for Space Heating. *Solar Energy*, 17:1–12, 1975.
- A. Ralston and H. S. Will. *Mathematical Methods for Digital Computers*. Wiley, New York, 1960.
- L. W. Rasmussen. Solar Collectors INDOOR/OUTDOOR tests. Environment resultant temperature. Technical report, 1991.
- Lord Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside. *Phi. Mag.*, 32:529–546, 1916.
- B. D. Reddy and H. F. Voyé. Finite Element Analysis of the stability of Fluid Motions. *Journ. of Comp. Physics*, 79:92–112, 1988.
- H. Reichardt. Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couette-stromung. *Angew Math. Mech.*, 36(5):26, 1956. citado em Joseph (1976a).
- R. L. Reid and A. H. P. Swift. El Paso solar pond: first in U.S. to generate electricity. *International Solar Pond Letters*, 2(1), 1987.
- R. L. Reid, A. H. P. Swift, W. J. Boegli, V. R. Kane, and B. A. Castaneda. Design, Construction and Initial Operation of a 3355m² Solar Pond in El Paso. *Transactions of the ASME*, (111), 1989.
- W. H. Reid. *The stability of paralell flows: Basic Developments in Fluid Dynamics*, volume 1. M. Holt. Academic Press, New York, 1965.

- O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 186:123, 1895. citado em Joseph (1976a).
- F. M. Richter. Focal mechanisms and seismic energy release of deep and intermediate earthquakes in the Tonga-Kermadec region and their bearing on the depth extent of mantle flow. *Journ. Geophys. Res.*, 84:6783–6795, 1979.
- R. D. Richtmyer and K. W. Morton. *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley Interscience, 1967.
- A. Ridha. *Etude experimentale de la double diffusion chaleur-masse dans un milieu stratifié*. PhD thesis, Uni. de Tunis II, 1997.
- A. E. Ringwood. Phase transformations and differentiation in subducted lithosphere: implications for mantle dynamics, basalt petrogenesis and crustal evolution. *Journ. Geol.*, 90:611–43, 1982.
- D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.
- R. L. Sani. On the Non Existence of Subcritical Instability in Fluid Layer Heated from Below. *Journ. Fluid Mech.*, 20:353, 1964a.
- R. L. Sani. On the Non Existence of Subcritical Instability in Fluid Layers Heated from Below. *Journ. Fluid Mech.*, 20:353, 1964b.
- R. L. Sani. On Finite Amplitude Roll Cell Disturbances in a Fluid Subjected to Heat and Mass Transfer. *A.I.Ch.E J.*, 2:971–980, 1965.
- J. A. Sarsten. LNG stratification and rollover Pipeline and Gas. *Journal*, pages 37–39, 1972.
- D. H. Sattinger. The mathematical problem of hydrodynamic stability. *Journ. Math. Mech.*, 19(797), 1970.
- R. S. Schechter, J. R. Hamm, and I. Prigogine. Thermal diffusion and convective stability. *Phys. Fluids*, 15:379–86, 1972.
- R. S. Schechter, M. G. Velarde, and J. K. Platten. *The two-component Bénard problem*. Wiley, 1981.
- F. Schen. Stability of Laminar flows: Theory of Laminar Flows. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, 4, 1964.
- S. G. Schladow. The upper mixed zone of a salt gradient solar pond. Its dynamics, prediction and control. *Solar Energy*, 33:417–426, 1984.
- R. W. Schmitt. The growth rate of super-critical salt fingers. *Deep-Sea Res.*, (26):23–40, 1979.
- F. Schulz-Grunow. Zur Stabilität der Couette Stromung. *Angew Math. Mech.*, 38:323, 1958. citado por Joseph (1976a).
- J. Serrin. On the stability of viscous motions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3(1), 1959a. citado por Joseph (1976a).
- J. Serrin. *Principles of Classical Fluid Mechanics*. Springer, Berlin, 1959b. citado por Joseph (1976a).
- L. Shen-sheng, L. Huan-min, and S. Ke-Hui. Solar Pond for heating anaerobic digesters. Final Report. Hamburg, 1987. ISES Solar World Congress.
- C. C. Shir and D. D. Joseph. Convective Instability in a Temperature and Concentration Field. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 30:38, 1968.
- T. G. L. Shirtcliffe and J. S. Turner. Observations of the cell structure of salt fingers. *Journ. Fluid Mech.*, 41:707–719, 1970.

- I. Silberman. Planetary waves in the atmosphere. *J. Meteorol.*, 11:27–34, 1954.
- J. C. Slater. Electronic energy bands in metal. *Phys. Rev.*, 45:794–801, 1934.
- K. A. Smith. On convective instability induced by surface-tension gradients. *Jorn. Fluid Mech.*, 24:401, 1966.
- E. M. Sparrow, R. J. Goldstein, and V. K. Jonsson. Thermal instability in a horizontal fluid layer. Effect of boundary conditions and non-linear temperature profil. *Journ. Fluid Mech.*, 18:513–528, 1964.
- R. Meyer Spasche. *Pattern Formation in Viscous Flows. The Taylor-Couette Problem and Rayleigh-Bénard convection*. Birkhauser Verlag, 1999.
- E. A. Spiegel. Convection in Stars I. Basic Boussinesq convection. *Ann. Rev. Astron. Astrophysics*, 9: 323–352, 1971.
- E. A. Spiegel. Convection in Stars II. Special Effects. *Ann. Rev. Astrophysics*, 10:261–304, 1972.
- T. Spohn and G. Schubert. Modes of mantle convection and the removal of heat from the Earth's interior. *Journ. Geophys. Res.*, 87:4682–96, 1982.
- M. E. Stern. The salt fountain and thermohaline convection. *Tellus*, 12:172–75, 1960.
- M. E. Stern. Collective Instability of Salt Fingers. *Journ. Fluid Mech.*, 35:209, 1969.
- C. V. Sternling and L. E. Scriven. Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect. *A.I.Ch.E J.*, 5:514, 1959.
- D. J. Stevenson and J. S. Turner. *Fluid models of mantle convection. The Earth: its Origin, Evolution and Structure*. ed. M.W. McElhinny, Academic, 1979.
- H. Stommel, B. Arons, and D. Blanchard. An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain. *Deep Sea Res.*, 3:152–153, 1956.
- K. Stork and U. Muller. Convection in boxes:experiments. *Jour. Fluid Mech.*, 54:599, 1972.
- K. Stork and U. Muller. Convection in boxes. An experimental investigation in vertical cylinders and annuli. *Jour. Fluid Mech.*, 71:231, 1975.
- B. Straughan. *The Energy Method, Stability and Nonlinear convection*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- J. T. Stuart. On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. *Journ. Fluid Mech.*, 4(1), 1958.
- J. T. Stuart. *Hydrodynamic Stability in Laminar Boundary Layers*. L. Rosenhead, London, Oxford, 1963.
- J. C. Swallow. Hot salty water. *Oceanus*, 11:3–5, 1965.
- J. L. Synge. On the stability of a viscous liquid between two rotating coaxial cylinders. *Proc. Roy. Soc.*, (167):250, 1938.
- H. Tabor. Solar Ponds. *Solar Energy*, 12:549–552, 1969.
- H. Tabor and R. Matz. A status report on a Solar Pond Project. *Solar Energy*, 9(4):177–182, 1965.
- G. L. Taylor. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans Roy. Soc.*, pages 223–289, 1923.
- T. Y. Thomas. Qualitative analysis of the flow of fluids in pipes. *Amer. J. Math.*, 64:754, 1942.

- J. Toomre, D. O. Gough, and E. A. Spiegel. Time-dependent solutions of multimode convection equations. *Journ. Fluid Mech.*, 125:99–122, 1982.
- P. T. Tsilingiris. *Analytical and experimental studies on salt gradient Solar Ponds*. PhD thesis, University of Reading, 1985.
- J. S. Turner. The coupled turbulent transports of salt and heat across a sharp density interface. *Int. Journ. of Heat and Mass Transfer*, 8:759–767, 1965.
- J. S. Turner. The behaviour of a stable salinity gradient heated from below. *Journ. Fluid Mech.*, 33:183–200, 1968.
- J. S. Turner. *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge University Press, 1973.
- J. S. Turner. Double-diffusive phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 6:37–56, 1974.
- J. S. Turner. Multicomponent convection. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17:11–14, 1985.
- M. G. Velarde and R. S. Schechter. Thermal Diffusion and Convective Stability II: An Analysis of the Convected Fluxes. *Phys. Fluids*, 155:1707, 1971a.
- M. G. Velarde and R. S. Schechter. Thermal Diffusion and Convective Stability III: A Critical Survey of Soret Coefficient Measurements. *Chem. Phys. Lett.*, 12:312, 1971b.
- G. Veronis. On finite amplitude instability in thermohaline convection. *Journ. Marine Res.*, 23:1–17, 1965.
- G. Veronis. Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection. *Journ. Fluid Mech.*, 34:315–336, 1968.
- J. V. Villadsen and W. E. Stewart. Solution of boundary value problems by orthogonal collocation. *Chem. Eng. Sci.*, 22:1483–1501, 1967.
- R. G. Voight, D. Gottlieb, and M. Y. Hussaini. Spectral Methods for Partial Differential Equations. Technical report, Philadelphia, 1984.
- G. Walin. Note on the Stability of Water Stratified by both Heat and Salt. *Tellus*, 16(3), 1964.
- Y. F. Wang, Z. L. Li, E. T. Wang, and M. L. Che. A proposal of combining a still with solar pond. Hamburg, 1987. ISES Solar World Congress.
- J. H. Watmuff, W. W. S. Charters, and D. Proctor. Solar and wind induced external coefficients for solar collectors, 1977.
- H. Weinberger. The Physics of the solar pond. *Solar Energy*, 8(2), 1964.
- L. J. Wittenberg and M. J. Harris. City of Miamisburg heats pool with salt gradient solar pond. *Solar Engineering*, 2, 1980.
- K. Wright. *Comp. Journ.*, 6:358, 1964.
- I. J. Wygnanski and F. H. Champagne. On transition in a pipe. Part I: The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *Journ. Fluid Mech.*, 59:281–335, 1973.
- I. J. Wygnanski, M. Sokolov, and D. Friedman. On transition in a pipe. Part II: The equilibrium puff. *Journ. Fluid Mech.*, 69:283–305, 1975.
- C. S. Yih. *Dynamics of Non-homogeneous Fluids*. Macmillan, New York, 1965.
- V. I. Yudovich. On the stability of self-oscillations of a liquid. *Soviet. Math. Dokl.*, 11(1543), 1970. citado por Joseph (1976a).
- F. Zangrando. On the hydrodynamics of salt-gradient solar ponds. *Solar Energy*, 46:323–341, 1991.